О поведении жидких частиц, участвующих в волновом движении границы раздела двух движущихся несмешивающихся жидкостей

Д. Ф. Белоножко,* А. А. Очиров†
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, физический факультет, кафедра микроэлектроники Россия,150000, Ярославль, ул Советская, д. 14/2

В настоящем сообщении рассмотрено поведение частиц двух несмешивающихся жидкостей при их относительном движении. Обнаружены любопытные закономерности движения частиц. Показано, что характер движения индивидуальных жидких частиц существенно зависит от скорости относительного движения контактирующих сред.

PACS: 47.20.Ft, 47.35.Bb, 47.35.Pq, УДК: 532.59
Ключевые слова: капиллярно–гравитационные волны, эффект Доплера, индивидуальные жидкие частицы, переменные Лагранжа.

ВВЕДЕНИЕ

Общеизвестно, что распространение бегущей волны по свободной поверхности жидкости инициирует циклическое движение индивидуальных жидких частиц. В учебной литературе обычно упоминается лишь о самой простой ситуации, когда частички тяжелой несжимаемой жидкости, участвующие в волновом движении, совершают круговые движения в вертикальной плоскости. В специализированной литературе предметом исследования неоднократно становилось не только циклическое, но и дрейфовое движение жидких частиц в направлении распространения волны. Этот феномен называется «Дрейф Стокса». Скорость этого дрейфа пропорциональна квадрату амплитуды волны и экспоненциально убывает с глубиной. Даже в незначительно усложненном случае, когда над идеальной жидкостью располагается другая менее плотная идеальная жидкость взаимоотношение движений различных жидких частиц примыкающих с разных сторон к возмущенной волновым движением границе раздела остается вне поля зрения общепринятых представлений. Еще менее освещенным оказывается вопрос описания движений индивидуальных жидких вблизи границы раздела жидкостей, движущихся друг относительно друг друга. Само поле скоростей в задачах подобного рода неоднократно рассчитывалось и аналитическими и численными методами, как правило, в связи с интересом исследователей к явлению неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Но все эти исследования в подавляющей части имеют дело с эйлеровым полем скоростей, которое не дает непосредственного описания движения индивидуальных жидких частиц. В настоящем исследовании предпринята попытка заполнить описанный пробел в задачах подобного рода и предложить аналитическое построение, позволяющее сосредоточиться на выяснении закономерностей движения именно индивидуальных жидких частиц.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривались две тяжелые идеальные несжимаемые несмешивающееся жидкости, движущие друг относительно друга с постоянной горизонтальной скоростью U_0 в декартовой системе координат, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия силы поля силы тяжести g. А плоскость Oxy совпадает с уровнем, по которому распространяется плоская капиллярно-гравитационная волна $z = \xi(x,t)$ с волновым числом k и амплитудой A. Полагалось, что нижняя жидкость с плотностью ρ^w занимает полупространство $z < 0$, а верхняя менее плотная верхняя жидкость плотности $\rho^a < \rho^w$ — полупространство $z > 0$. Коэффициент поверхностного натяжения γ на поверхности раздела полагался известным. Без уменьшения общности можно считать нижнюю жидкость покоящейся, верхнюю — движущейся в положительном направлении оси Ox. Для простоты движение жидкости полагалось независящим от горизонтальной координаты y.

Задача решалась методом разложения по малому параметру $\varepsilon = Ak$, пропорциональному отношению амплитуды волнового движения к длине волны. В дальнейшем изложении для краткости будут употребляться слова «порядок малости по амплитуде». Задача стандартным образом разбивалась на задачи различных порядков малости [1], которые последовательно решались до определения главных лидирующих слагаемых в циклической и дрейфовой компонентах движения жидких частиц. Решение задачи первого порядка малости для отклонения ξ_1, гидродинамического потенциала верхней жидкости ϕ_1 и гидродинамического потенциала нижней жидкости ψ_1 имеет вид:

$$\xi_1 = A\cos(kx-\omega t)\,,\ \ \psi_1 = A\Lambda\exp(kz)\sin(kx-\omega t)\,,$$
$$\phi_1 = A\Theta\exp(-kz)\sin(kx-\omega t) \qquad (1)$$

*E-mail: belonozhko@mail.ru
†E-mail: otchirov@mail.ru

Константы $\Lambda = \omega/k$ и $\Theta = -\omega/k + U_0$ определяются волновым числом и скоростью движения верхней жидкости. Циклическая частота волнового движения ω связана с волновым числом и другими параметрами задачи дисперсионным уравнением:

$$\omega = \left(kU_0\rho^a + \sqrt{k\left(-kU_0^2\rho^w\rho^a + k^2\gamma\left(\rho^w+\rho^a\right) + g\left(\rho^w-\rho^a\right)\left(\rho^w+\rho^a\right)\right)}\right) / \left(\rho^w+\rho^a\right). \tag{2}$$

2. ПЕРЕХОД К ЛАГРАНЖЕВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Для математического описания движения индивидуальных жидких частиц необходимо перейти от эйлерового представления задачи (1) к полю скоростей в переменных Лагранжа. В работе [2] можно найти способ такого перехода, который с точностью до слагаемых второго порядка малости по амплитуде волны сводится к применению формул:

$$\begin{gathered} u_L = u_1 + u_2 + \left(\int_0^t u_1 d\tau\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\int_0^t v_1 d\tau\right)\frac{\partial u_1}{\partial z}, \\ v_L = v_1 + v_2 + \left(\int_0^t u_1 d\tau\right)\frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\int_0^t v_1 d\tau\right)\frac{\partial v_1}{\partial z} \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $u = u(x,z,t)$ и $v = v(x,z,t)$ — горизонтальная и вертикальная составляющие эйлеровой скорости, а $u_L = u_L(x,z,t)$ и $v_L = v_L(x,z,t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты лагранжевой скорости жидкой частички. Нижним индексом обозначена принадлежность к задаче соответствующего порядка малости по амплитуде волны в эйлеровом представлении. Формулы (3) подразумевают, что в начальный момент времени $t = 0$ эйлерова и лагранжевы скорости равны, а после интегрирования координаты x, z приобретают смысл координат $x = a$, $z = b$ материальной частички в начальный момент времени $t = 0$. Важно отметить, формулы (3) можно применять только при перемещениях жидкой частички на величину порядка амплитуды волны. При выводе этих формул использовалось разложение по степеням смещения частички жидкости. Это позволяет без дополнительных усилий рассчитать лагранжево поле скоростей только в нижней жидкости. После интегрирования по времени получаются искомые соотношения, описывающие траектории движения частичек нижней жидкости:

$$\begin{gathered} X^w = x - Ae^{kz}\sin(kx-\omega t) + A^2kt\omega e^{2kz}, \\ Z^w = z + Ae^{kz}\cos(kx-\omega t). \end{gathered} \tag{4}$$

В выражениях (4) учтено, что в циклическом движении жидкой частички лидирующими слагаемыми являются слагаемые первого порядка малости по амплитуде волны, а в дрейфовом — компоненты второго порядка малости, возникающие из интегральных слагаемых в формулах (3). В формулах (4) как раз и выписаны только главные слагаемые, характеризующие циклические и дрейфовые свойства движения жидкой частички.

Чтобы корректно применить формулы (3) для расчета лагранжевой скорости частичек верхней движущейся жидкости, необходимо сначала преобразовать эйлерово описание поля ее скоростей в эйлерово же описание, связанное с системой отсчета, движущейся со скоростью U_0 вдоль оси Ox. Без уменьшения общности полагалось, что оси старой и новой систем координат параллельны, а при $t = 0$ начала обеих координатных систем совпадают. При пересчете свойств волнового движения в новую систему отсчета принципиально важно учесть эффекта Доплера и изменить частоту волнового движения на новое значение $w = \omega - kU_0$. В новой системе отсчета применение формул (3) и интегрирование по времени приводит к выражениям для траекторий жидкой частички верхней жидкости (в движущейся со скоростью U_0 вдоль оси Ox системе отсчета):

$$\begin{gathered} X^a = x + Ae^{-kz}\sin(kx-wt) + A^2ktwe^{-2kz}, \\ Z^a = z + Ae^{-kz}\cos(kx-wt). \end{gathered} \tag{5}$$

Также, как и в случае с соотношениями (4) для циклических и дрейфовых слагаемых оставлены только лидирующей составляющие полного выражения. Координаты x и z, входящие в эти формулы, имеют смысл констант. Они описывают «среднее» положение частицы при $t = 0$ и являются одинаковыми в обеих рассмотренных системах отсчета. В этой связи, формулы (5) описывают не волновой, а циклический процесс (аналогичный колебаниям часового маятника), который в рамках преобразований Галилея при переходе в любую другую инерциальную систему отсчета сохраняет частоту своего повторения. В связи со сказанным, при обратном переходе в неподвижную систему отсчета частоту изменять не нужно. Таким образом, для получения вида траекторий частичек верхней жидкости в неподвижной системе отсчета отнесенной к нижней жидкости достаточно изменить лишь правую часть первого соотношения (5) — добавить в нее слагаемое $U_0 t$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В рассматриваемой модели волновое движение с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ является бегущей волной постоянной амплитуды, только если тангенциальный скачок скорости на поверхности раздела жидкостей, измеряемый значением U_0, не превышает критического значения:

$$U_0 \le U_* = \frac{k^2\gamma\,(\rho^a + \rho^w) + g\,(\rho^a - \rho^w)}{k\,\rho^a\rho^w}.$$

Если $U_0 > U_*$ решением задачи является бегущая волна с экспоненциально нарастающей во времени амплитудой и описывает начальную стадию развития неустойчивости тангенциального разрыва скорости.

Анализ выражений (4) и (5) показал, что характер движения индивидуальных жидких частичек примыкающих к поверхности раздела жидкостей с разных сторон не настолько самоочевиден, чтобы оказаться простым следствием неких заранее высказанных качественных рассуждений.

Для определенности, рассматривались волновые движения, описывающие распространение волны вдоль направления горизонтальной оси Ox (слева направо для стороннего наблюдателя). В неподвижной системе отсчета, связанной с нижней жидкостью, частички этой жидкости совершают циклические движения по часовой стрелке с небольшим смещением вправо, после каждого цикла. Частички же верхней жидкости при $U_0 = 0$ циклически петляют с той же частотой против часовой стрелки, с каждым периодом также несколько смещаясь вправо. С увеличением U_0 период циклических движений частиц верхней жидкости увеличивается вместе с дрейфовым сдвигом за период. Петли траекторий частичек верхней жидкости с ростом U_0 растягиваются до тех пор, пока не трансформируются в плавные периодические линии без самопересечений. Эти линии продолжают «распрямляться» и, при достижении скорости верхней жидкости значения $U_0 = \omega/k$, полностью вытягиваются в горизонтальные прямые. Условие $U_0 = \omega/k$ означает, что скорость верхней жидкости сравнялась с фазовой скоростью, распространяющейся по границе раздела волны. В этих условиях частички нижней жидкости продолжают совершать петлеобразные движения со сдвигом вправо, а частички верхней жидкости участвуют лишь в общем поступательном движении со скоростью $U_0 = \omega/k$. При дальнейшем увеличении скорости $U_0 > \omega/k$ траектории частичек нижней жидкости снова выгибаются в периодические волнообразные кривые. При переходе к неустойчивому режиму $U_0 > U_*$ амплитуда этих волнообразных движений начинает расти со временем. Для частичек нижней жидкости будет наблюдаться нарастание амплитуды циклических движений, как и прежде, совершаемых по часовой стрелке. Дрейфовая компонента движения нижней жидкости тоже начнет увеличиваться со временем.

В системе отсчета, движущейся вместе с верхней жидкостью, со скоростью U_0 движение частичек верхней жидкости будет выглядеть иначе. При увеличении U_0 от нуля до значения ω/k наблюдатель будет «догонять» убегающие от него гребни волн и регистрировать увеличение периода циклического движения частиц верхней жидкости, сопровождаемого уменьшением дрейфовой скорости вдоль направления распространения волны. При $U_0 = \omega/k$ и циклическое и дрейфовое движения полностью прекратятся, верхняя жидкость превратится в покоящуюся, а волновой рельеф поверхности раздела «застынет» во времени. С дальнейшим увеличением скорости $U_0 > \omega/k$ движущейся с верхней жидкостью наблюдатель зафиксирует движение гребней волн влево и возобновление циклических движений жидких частичек, но уже по часовой стрелке. При этом появиться нарастающее с увеличением U_0 среднее дрейфовое движение влево — по движению гребней волн (в выбранной системе отсчета). При переходе к неустойчивому режиму $U_0 > U_*$ амплитуда циклического и скорость дрейфового движения начнут расти со временем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Характер движения индивидуальных жидких частиц вблизи возмущенной волновым движением горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей существенно зависит от скорости относительного движения контактирующих сред. Частички относящиеся к разным жидкостям могут совершать как противонаправленные так и сонаправленные циклические движения с различным периодом. При определенных условиях движение частичек одной из жидкостей вырождается в простое прямолинейное движение с постоянной скоростью.

[1] *Белоножко Д. Ф., Ширяева С. О., Григорьев А. И.* Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: ЯрГУ, 2006.

[2] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Ч.1. М.: Мир, 1981.

About behavior of liquid particles taking part in wave motion of two immiscible fluids interface

D. F. Belonozhko[a], **A. A. Otchirov**[b]

Department of Microelectronics, Faculty of Physics, Demidov YAroslavl State University
Yaroslavl 150000, Russia
E-mail: [a]belonozhko@mail.ru, [b]otchirov@mail.ru

There are behavior of liquid particles of two immiscible moving fluids is considered. Curious patterns of liquid particles motion are discovered. It is shown that the character of the individual fluid particle motion significant depends on the relative velocity of the contact fluids.

PACS: 47.20.Ft, 47.35.Bb, 47.35.Pq
Keywords: capillary-gravity wave, Doppler effect, liquid particle, Lagrangian coordinates.

Сведения об авторах

1. Белоножко Дмитрий Федорович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; e-mail: belonozhko@mail.ru.
2. Очиров Артем Александрович — аспирант; e-mail: otchirov@mail.ru.