

## О волновых движениях в двухслойной жидкости с поверхностно-активным веществом и поверхностным электрическим зарядом на верхней границе

А. В. Кондратьева,\* Д. Ф. Белоножко†

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, физический факультет,  
лаборатория математического моделирования физических процессов  
Россия, 150000, Ярославль, ул. Советская, д. 14

Исследовано волновое движение в двухслойной вязкой идеально проводящей жидкости, несущей на своей внешней поверхности электрический заряд и нерастворимую пленку поверхностно-активного вещества (ПАВ). В работе рассмотрены закономерности влияния ПАВ, электрического заряда и изменения межслойного поверхностного натяжения на различные виды волновых движений, реализующихся в описанной системе. Рассмотрено взаимное влияние волновых движений друг на друга.

PACS: 47.35.Lf

УДК: 532.6

Ключевые слова: двухслойная вязкая жидкость, поверхностно-активное вещество, электрический заряд на поверхности слоя, капиллярно-гравитационные волны, внутренние волны, волны Марангони, неустойчивость Тонкса-Френкеля.

Исследовано волновое движение в двухслойной идеально проводящей жидкости, несущей на своей внешней поверхности электрический заряд и нерастворимую пленку поверхностно-активного вещества (ПАВ). Верхний слой характеризуется толщиной  $h$ , плотностью  $\rho_1$  и коэффициентом кинематической вязкости  $\nu_1$ . Равновесная концентрация ПАВ  $\Gamma_0$  и соответствующее ей равновесное значение поверхностного натяжения  $\gamma_1$  на его поверхности полагаются известными. Эффективность перераспределения величины поверхностного натяжения вдоль возбужденной волновым движением поверхности определяется параметром упругости пленки  $\varepsilon = \Gamma_0 (d\gamma_1/d\Gamma)$ , который пропорционален тангенсу угла наклона изотермы, изображающей зависимость поверхностного натяжения от концентрации ПАВ [1]. Считается, что обе жидкости являются идеальными проводниками. Внешняя поверхность верхнего слоя несет электрический заряд, который в равновесном состоянии распределяется с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma_0$ . Бесконечно глубокий нижний слой имеет плотность  $\rho_2$  и коэффициент кинематической вязкости  $\nu_2$ . Коэффициент поверхностного натяжения между слоями  $\gamma_2$  тоже считается известным. Задача рассматривается в декартовой прямоугольной системе координат  $Oxyz$ , ось  $Ox$  которой направлена вертикально вверх, против направления действия по-

ля силы тяжести  $g$ . Ось  $Ox$  направлена горизонтально вдоль границы между слоями. Для простоты течение жидкости считается независимым от горизонтальной координаты  $Oy$ .

В работе рассмотрены закономерности влияния ПАВ, электрического заряда и изменения межслойного поверхностного натяжения  $\gamma_2$  на различные виды волновых движений, реализующихся в описанной системе. Рассмотрено взаимное влияние волновых движений друг на друга.

Полная математическая формулировка задачи расчета поля скоростей, давления, концентрации ПАВ и электрического потенциала в верхнем полупространстве состоит из уравнений электрогидродинамики вязкой проводящей жидкости, дополненных стандартными граничными условиями, включающими закон сохранения ПАВ на деформирующейся в процессе волнового движения внешней поверхности. Задача линеаризовалась по амплитуде волнового движения и решалась в первом приближении по отношению амплитуды волны к ее длине. Неизвестные функции задачи первого порядка малости искались в виде бегущей волны.

В безразмерных переменных  $\rho_1 = g = \gamma_1 = 1$  дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту  $s$  с волновым числом  $k$  и другими параметрами задачи, имеет вид  $\text{Det} [(A_{ij})]$ , где

$$A_{1,1} = -Ch(hk); \quad A_{1,2} = -Sh(hk);$$

$$A_{1,3} = -Ch(hq_1); \quad A_{1,4} = Sh(hq_1);$$

$$A_{1,5} = s; \quad A_{1,6} = 0;$$

$$A_{1,7} = 0; \quad A_{1,8} = 0;$$

$$A_{2,1} = -\frac{ik^2\varepsilon Sh(hk)}{s} + 2ikCh(hk)\nu_1; \quad A_{2,2} = -ik\varepsilon Ch(hk) + 2ikSh(hk)\nu_1;$$

$$A_{2,3} = -\frac{ik\varepsilon Sh(hq_1)q_1}{s} + ikCh(hq_1)\nu_1 + \frac{iCh(hq_1)q_1^2\nu_1}{k}; \quad A_{2,4} = -\frac{ik\varepsilon Ch(hq_1)q_1}{s} + ikSh(hq_1)\nu_1 + \frac{iSh(hq_1)q_1^2\nu_1}{k};$$

$$\begin{aligned}
& A_{2,5} = 0; \quad A_{2,6} = 0; \quad A_{2,7} = 0; \quad A_{2,8} = 0; \\
A_{3,1} &= -\frac{sSh(hk)}{k} + 2kSh(hk)\nu_1; \quad A_{3,2} = -\frac{sCh(hk)}{k} + 2kCh(hk)\nu_1; \\
& A_{3,3} = -2Sh(hq_1)q_1\nu_1; \quad A_{3,4} = -2Ch(hq_1)q_1\nu_1; \\
& A_{3,5} = -\frac{\omega_0^2}{k}; \quad A_{3,6} = 0; \quad A_{3,7} = 0; \quad A_{3,8} = 0; \\
& A_{4,1} = 0; \quad A_{4,2} = -i; \quad A_{4,3} = 0; \quad A_{4,4} = -\frac{iq_1}{k}; \\
& A_{4,5} = 0; \quad A_{4,6} = -1; \quad A_{4,7} = -1; \quad A_{4,8} = 0; \\
& A_{5,1} = -1; \quad A_{5,2} = 0; \quad A_{5,3} = -1; \quad A_{5,4} = 0; \\
& A_{5,5} = 0; \quad A_{5,6} = 0; \quad A_{5,7} = 0; \quad A_{5,8} = s; \\
& A_{6,1} = 0; \quad A_{6,2} = 0; \quad A_{6,3} = 0; \quad A_{6,4} = 0; \\
& A_{6,5} = 0; \quad A_{6,6} = -i; \quad A_{6,7} = -\frac{ik}{q_2}; \quad A_{6,8} = s; \\
& A_{7,1} = -2ik\nu_1; \quad A_{7,2} = 0; \quad A_{7,3} = -ik\nu_1 - \frac{iq_1^2\nu_1}{k}; \quad A_{7,4} = 0; \\
& A_{7,5} = 0; \quad A_{7,6} = -2k\nu_2\rho_2; \quad A_{7,7} = -\frac{k_2\nu_2\rho_2}{q_2} - q_2\nu_2\rho_2; \quad A_{7,8} = 0; \\
& A_{8,1} = 0; \quad A_{8,2} = \frac{s}{k} + 2k\nu_1; \quad A_{8,3} = 0; \quad A_{8,4} = 2q_1\nu_1; \\
& A_{8,5} = 0; \quad A_{8,6} = -\frac{1s\rho_2}{k} - 2ik\nu_2\rho_2; \quad A_{8,7} = -2ik\nu_2\rho_2; \quad A_{8,8} = 1 - k_2\gamma_2 - \rho_2.
\end{aligned}$$

Здесь  $\omega_0^2 = k + k^3 - k^2W$  — безразмерная круговая частота волнового движения, реализующегося при тех же условиях в сплошной идеальной бесконечно глубокой жидкости без пленки ПАВ на поверхности. Безразмерная величина  $W = 4\pi\sigma_0^2$  — параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий отношение электрических и лапласовских сил на гребнях волн.

Дисперсионное уравнение задачи трансцендентно, его решения могут быть найдены только численными методами. Решений дисперсионного уравнения бесконечно много. Это связано с периодичностью в комплексной плоскости гиперболических функций, входящих в уравнение. Подавляющее большинство решений имеет аperiодический быстро затухающий характер. На практике проявить себя могут только решения с минимальным по модулю декрементом затухания или решения с нарастающей по времени амплитудой. Расчеты показывают, что таких решений не больше шести. Два из четырех корней описывают капиллярно-гравитационные волны, бегущие в разные стороны, два — распространяющиеся в противоположные стороны волны Марангони [1], возбуждаемые сжатиями и растяжениями пленки ПАВ, еще два — описывают внутренние волны, возникающие между слоями при движении жидкости.

При исследовании безразмерные коэффициенты вязкости жидкости полагались равными  $\nu_1 = \nu_2 = 0.002$ , что соответствует вязкости воды. Отношение плотно-

стей жидкости  $\rho_2/\rho_1 = 1.1$ . В отсутствии электрического заряда, как и в случае сплошной жидкости с пленкой ПАВ на внешней поверхности, увеличение по абсолютной величине коэффициента упругости пленки ПАВ  $\varepsilon$  приводит к сильному возрастанию модуля декремента затухания и частоты волн Марангони, возбуждаемых сжатиями и растяжениями пленки ПАВ. При этом частота капиллярно-гравитационных и внутренних волн меняется весьма слабо. Существует значение упругости пленки ПАВ, при котором частоты капиллярно-гравитационных и внутренних волн совпадают с частотой волн Марангони. В этом случае пленка ПАВ оказывает особенно ярко выраженное демпфирующее влияние на капиллярно-гравитационные волны, распространяющиеся по поверхности верхнего слоя. Расчеты показали, что уменьшение толщины  $h$  верхнего жидкого слоя усиливает этот эффект.

При увеличении межслойного безразмерного поверхностного натяжения  $\gamma_2$  в диапазоне  $0 \leq \gamma_2 \leq 1$ , эффект демпфирования капиллярно-гравитационных волн пленкой ПАВ ослабевает, а значение коэффициента упругости пленки ПАВ  $\varepsilon$ , соответствующее максимальному гашению волны пленкой, сохраняется неизменным. На частоту капиллярно-гравитационных волн изменение  $\gamma_2$  практически не влияет. В то же время, с увеличением межслойного поверхностного натяжения  $\gamma_2$  в незначительном диапазоне  $0 \leq \gamma_2 \leq 0,05$

сильно увеличивается эффект гашения внутренних волн. Значение коэффициента упругости пленки ПАВ  $\varepsilon$ , соответствующее максимуму гашения, смещается в область больших по модулю значений. Частота внутренних волн увеличивается.

Выяснилось, что увеличение электрического заряда на поверхности жидкого слоя наиболее сильно сказывается лишь на свойствах капиллярно-гравитационных волн. Именно они претерпевают неустойчивость по отношению к избытку электрического заряда, которая называется неустойчивостью Тонкса–Френкеля [2, 3]. Тогда как декремент и частота волн Марангони даже при значительных изменениях величины поверхностной плотности электрического заряда изменяются весьма слабо. Для каждого волнового числа  $k$  существует свое пороговое значение параметра  $W$ , при превышении которого амплитуда волнового движения начинает неограниченно расти во времени — режим волнового затухающего движения сменяется режимом аperiodически нарастающего движения. Наиболее неустойчивым волновым числом является  $k = 1$ , для которого пороговое значение начала развития неустойчивости  $W = 2$ .

Кроме влияния пленки ПАВ на капиллярно-гравитационные и внутренние волны, в системе наблюдается влияние слоистого строения жидкости на свойства волнового движения. Расчеты показали, что при увеличении волнового числа  $k$  частоты поверхностных и внутренних волн могут только сближаться, но не пересекаться. В этих условиях внутренние волны начинают затухать особенно сильно. Выяснилось, что при закритической (в смысле инициации неустойчивости по отношению к избытку заряда) плотности электрического заряда  $W > 2$ , неустойчивость претерпевает только один тип волнового движения — тот, для которого отношение амплитуды волны на внешней поверхности к амплитуде внутренних волн существенно больше единицы. Это означает, что, по крайней мере, на начальном этапе неустойчивость развивается именно в виде сильной деформации внешней поверхности, но не внутренней. При докритических значениях поверхностной плотности электрический заряд особенно сильно влияет только на частоту волнового движения, в котором амплитуда поверхностной волны превышает амплитуду внутренней.

- [1] Ролдугин В.И. Физико-химия поверхности: учебник-монография. Долгопрудный: изд. дом «Интеллект», 2008.  
[2] Френкель Я.И. ЖЭТФ. 6, № 4. С. 348. (1936).

- [3] Tonks L. Phys. Rev. 48. P. 562. (1935).

## About the wave motions in two-layer liquid with surfactant and surface electric charge on the upper border

A. V. Kondratieva<sup>a</sup>, D. F. Belonozhko<sup>b</sup>

Laboratory of physical processes modeling, Faculty of Physics, Yaroslavl State University  
Yaroslavl 150000, Russia

E-mail: <sup>a</sup>KondratievaAV@gmail.com, <sup>b</sup>Belonozhko@mail.ru

The wave motion into two-layer conducting liquid with insoluble film of surfactant on the upper electrically charged surface has been investigated. The role of surfactant and charge and also variation of interfacial tension at different mode of wave motion have been considered. Mutual influence of different effects has been analyzed.

PACS: 47.35.Lf

Keywords: two-layer viscous liquid, surfactant, electric charge on the surface, capillary-gravity waves, Marangony waves, waves between layers, Tonks-Frenkel instability.

### Сведения об авторах

1. Кондратьева Алена Викторовна – аспирант; e-mail: KondratievaAV@gmail.com.
2. Белоножко Дмитрий Федорович – доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: Belonozhko@mail.ru.