

## Исследование эволюции длинной синусоидальной волны в рамках уравнения Гарднера

Е. А. Рувинская,\* О. Е. Куркина,† А. А. Куркин,‡ А. Р. Гиниятуллин§

Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева,  
 научно-исследовательская лаборатория «Моделирование природных и техногенных катастроф»  
 Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, к. 1

Целью настоящего исследования является изучение возможных механизмов генерации короткоживущих импульсов большой амплитуды при дегенерации длинной синусоидальной (приливной) волны в рамках уравнения Гарднера. Проведен статистический анализ ансамбля солитонов, образованного при эволюции волнообразного бора для различных возможных условий окружающей среды.

PACS: 47.35.-i

УДК: 532.5

Ключевые слова: солитоны, волны экстремальной амплитуды, вероятность превышения уровня, асимметрия, эксцесс.

В настоящей работе рассматривается процесс эволюции длинной синусоидальной волны в рамках безразмерного уравнения Гарднера с различными знаками коэффициента кубической нелинейности. Прикладной интерес к этой задаче связан с тем, что интенсивные волнообразные боры, часто наблюдающиеся в устьях и эстуариях рек, обязаны своим появлением дегенерации длинной приливной волны. Такие боры встречаются и в шельфовой зоне океанов во время цунами. Иногда волнообразные боры называют солиборами [1], поскольку в процессе их эволюции на укрученном фронте генерируется последовательность солитонов. Хотя первоначально термин «солибор» был связан с дегенерацией внутренних приливных волн на океанском шельфе, подобные явления характерны и для озер [2]. С точки зрения практических приложений изучение солиборов, заключающих в себе огромную энергию, важно, поскольку они являются одним из основных источников транспорта наносов, ресуспендирования, способствуют турбулентному перемешиванию в толще воды, а также существенно влияют на распространения звука в толще воды и на формирование придонного звукового канала. Еще одним интересным аспектом при изучении солиборов является тот факт, что при определенных условиях в процессе их эволюции могут генерироваться импульсы экстремальной амплитуды.

Для исследования дегенерации длинной синусоидальной волны в общем случае использовалась каноническая форма уравнения Гарднера с положительным или отрицательным коэффициентом кубической нелинейности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta(1 \pm \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

для которого решалась начальная задача с периодиче-

скими граничными условиями:

$$\eta(x, 0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \quad \eta(x+L, t) = \eta(x, t), \quad (2)$$

где  $L$  — длина расчетной области, а амплитуда волны  $A$  варьировалась от 0.1 до 3 безразмерных единиц.

Для решения задачи (1), (2) использовался численный код, основанный на неявном псевдо-спектральном методе [3], который позволяет сохранять интегралы, определенные формулами (в рамках численной задачи пределами интегрирования служат границы расчетной области):

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx. \quad (3)$$

Используемый численный код неоднократно верифицировался при моделировании волновых процессов различной природы (например, [4, 5]).

При малых амплитудах гармонической волны (2), например, при  $A = 0.1$  безразмерных единиц (предельная амплитуда гарднеровского солитона составляет одну безразмерную единицу) сценарий ее эволюции как в случае отрицательного, так и в случае положительного параметра кубической нелинейности, одинаков и имеет много общих особенностей с процессом дегенерации такого начального возмущения в рамках уравнения Кортевега-де Вриза [6, 7]. С течением времени один из фронтов укручается, и на нем генерируются кноидальные волны переменной, убывающей по линейному закону, амплитуды. Эти волны взаимодействуют между собой в силу периодичности граничного условия. При этом наблюдается отрицательный «сдвиг фазы», как и в случае двух-солитонного взаимодействия типа обгон, но амплитуда результирующего импульса в сам момент столкновения меньше, чем амплитуда кноидальной волны с большей амплитудой. Спектры Фурье для моментов времени, когда еще не началось активное взаимодействие генерируемых волн, имеют асимптотику  $k^{-4/3}$  (где  $k$  — волновое число) для порядка двадцати первых гармоник, что является общей чертой для нелинейных гиперболических систем со слабой дисперсией. Более подробно процесс

\*E-mail: e.rouvinskaya@gmail.com

†E-mail: oksana.kurkina@mail.ru

‡E-mail: aakurkin@gmail.com

§E-mail: araratishe@gmail.com

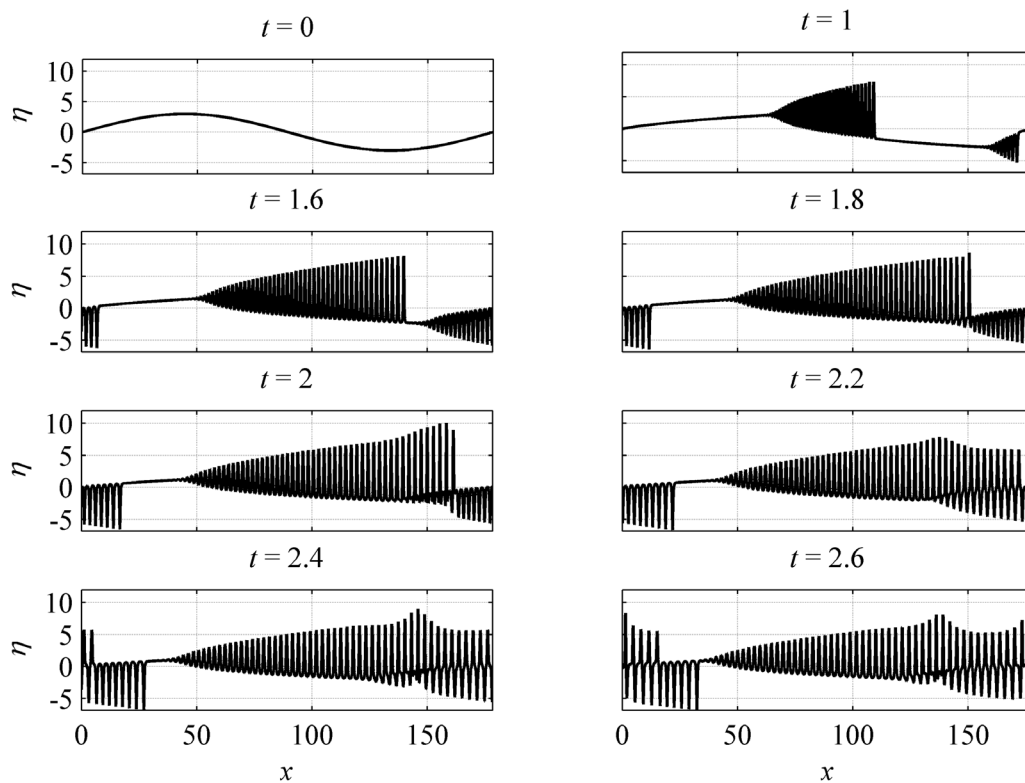


Рис. 1: Эволюция синусоидального импульса с амплитудой 3 безразмерные единицы в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности

эволюции синусоидальных волн малой амплитуды проанализирован в работе [8].

При увеличении амплитуды до 0.5 безразмерных единиц эффект влияния кубической нелинейности на волновую динамику становится существенным. Так, при отрицательном кубическом члене сдвигается точка «опрокидывания», генерируется один «широкий» гарднеровский солитон и группа малоамплитудных солитонных волн, которые «пробегают» по его вершине (этот процесс продемонстрирован в работе [8]).

При положительном значении коэффициента кубической нелинейности и достижении амплитуды  $A = 1.5$  появляется вторая точка «опрокидывания», и генерируются импульсы как положительной, так и отрицательной полярности [8]. Этот случай интересен тем, что при взаимодействии волн противоположных полярностей происходит увеличение максимальной амплитуды результирующего поля.

Поэтому для изучения возможных механизмов генерации волн экстремальных амплитуд в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности был выбран синусоидальный импульс достаточно большой длины (такой, чтобы генерировалось порядка ста солитонов) с амплитудой  $A = 3$  безразмерным единицам. В этом случае акцент ставился не на изучении самого процесса де-

генерации синусоидальной волны, а на исследование возникающих волновых режимов в долгосрочной перспективе.

На рис. 1 представлен процесс образования волнового поля, являющегося результатом взаимодействия ансамбля солитонов положительной и отрицательной полярности. Для этого поля выполнен статистический анализ, а именно: построены функции вероятности превышения уровня для высот волн (рис. 2) и вычислены значения асимметрии и эксцесса (рис. 3) для всех моментов времени, проведено сравнение с известными статистическими законами распределения на основе полученных гистограмм.

Из графика функции вероятности превышения уровня видно, что после момента времени  $t = 1.5$ , когда начинаются парные взаимодействия солитонов положительной и отрицательной полярности, возникают существенные «выбросы», амплитуды которых более чем в четыре раза превышают амплитуду начального возмущения. Графики асимметрии и эксцесса также характеризуются наличием «пиков» в зонах выбросов. Таким образом, дегенерация длинной синусоидальной волны с амплитудой, достаточной для генерации солитонов положительной и отрицательной полярности, в природных условиях, соответствующих уравнению Гарднера с положительным коэффициентом ку-

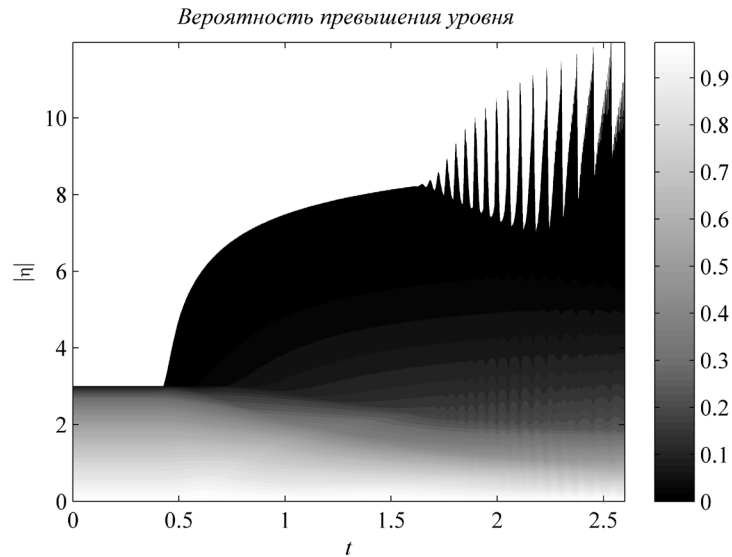


Рис. 2: Вероятность превышения уровня для разных моментов времени при эволюции синусоидального импульса с амплитудой 3 безразмерные единицы в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности

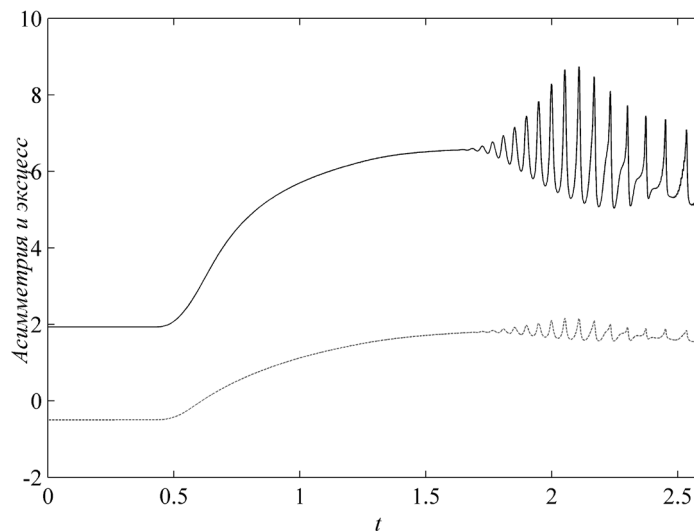


Рис. 3: Асимметрия (серый пунктир) и эксцесс (черная линия) для разных моментов времени при эволюции синусоидального импульса с амплитудой 3 безразмерные единицы в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности

бической нелинейности может являться важным механизмом генерации аномально высоких волн.

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены при поддержке

гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-5208.2016.5).

[1] *Apel J. R.* J. Phys. Oceanogr. **33**. P. 2247. (2003).

[2] *Hutter K.* Nonlinear Internal Waves in Lakes. Springer, 2012.

[3] *Fornberg B. A* Practical Guide to Pseudospectral Methods. Cambridge University Press, 1998.

[4] *Куркин А.А., Полухина О.Е.* Известия Академии ин-

- женерных наук РФ. Прикладная математика и механика. **4**. С. 99. (2003). [7] *Salupere A.* et al. Chaos, Solitons and Fractals. **15**. P. 29. (2003).
- [5] *Pelinovsky E.* et al. Solitary Waves in Fluids. Chapter 4. Boston: WIT Press, Southampton, 2007. [8] *Kurkina O.E.* et al. Physica D: Nonlinear Phenomena. (2015). doi:10.1016/j.physd.2015.12.007.
- [6] *Salupere A.* et al. Chaos, Solitons and Fractals. **14**. P. 1413. (2002).

## The study of long sine wave's evolution in the framework of the Gardner equation

**E. A. Rouvinskaya<sup>a</sup>, O. E. Kurkina<sup>b</sup>, A. A. Kurkin<sup>c</sup>, A. R. Giniyatullin<sup>d</sup>**

*Laboratory of Modeling of Natural and Anthropogenic Disasters, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev*

*24 Minin street, 603950 Nizhny Novgorod, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>e.rouvinskaya@gmail.com, <sup>b</sup>oksana.kurkina@mail.ru, <sup>c</sup>aakurkin@gmail.com, <sup>d</sup>araratishe@gmail.com*

The purpose of this study is to investigate the possible mechanisms of extreme waves' generation during degeneration of long sinusoidal (tidal) waves in the framework of the Gardner equation. A statistical analysis of the solitons ensemble formed during the evolution of the undular bore in various possible environmental conditions is done.

PACS: 47.35.-i

Keywords: solitons, extreme waves, exceedance probability distribution, skewness, kurtosis.

### Сведения об авторах

1. Рувинская Екатерина Александровна — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: e.rouvinskaya@gmail.com.
2. Куркина Оксана Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, доцент; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: oksana.kurkina@mail.ru.
3. Куркин Андрей Александрович — доктор физ.-мат. наук, науч. руководитель НИЛ Моделирования природных и техногенных катастроф, профессор; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: aakurkin@gmail.com.
4. Гиниятуллин Айрат Рафаэлевич — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: araratishe@gmail.com.