

## Моделирование полей аксиально–симметричных сфокусированных излучателей ультразвуковой хирургии с использованием широкоугольного параболического приближения

И. С. Мездрохин,<sup>\*</sup> П. В. Юлдашев,<sup>†</sup> В. А. Хохлова<sup>‡</sup>

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Построен численный алгоритм расчета поля аксиально–симметричного источника мощного сфокусированного ультразвука на основе широкоугольного параболического приближения уравнения Гельмгольца. Проведено численное моделирование поля аксиально–симметричного сферического излучателя с апертурой  $a = 5$  см, фокусным расстоянием  $F = 9$  см и частотой  $f = 1$  МГц. Полученное решение сравнивалось с точным решением дифракционной задачи и решением обычного параболического уравнения. Результаты показали, что относительная ошибка амплитуды давления в фокусе излучателя в решении для широкоугольного параболического приближения составляет 1–2% и 10–12% — при использовании параболического приближения. Время расчета конфигурации поля при использовании широкоугольной модели оказывается сравнимым с временем расчета на основе параболической модели, и на порядок меньше, чем для нахождения точного решения с помощью интеграла Рэлея.

PACS: 43.20.Vi

УДК: 534.21

Ключевые слова: акустика, излучатель, фокус, интеграл Рэлея, уравнение Гельмгольца, параболическое приближение, широкоугольное приближение, численное моделирование.

Мощный сфокусированный ультразвук находит широкое применение в современных терапевтических и хирургических медицинских приложениях [1]. Среди них можно перечислить неинвазивное разрушение опухолей в различных органах, остановку внутренних кровотечений при травмах (ультразвуковой гемостаз) и ультразвуковую коррекцию фигуры (неинвазивная липосакция). Для описания полей излучателей ультразвуковой хирургии часто используются методы численного моделирования. Существуют несколько разных моделей, описывающих такие поля. Различие этих моделей состоит в точности описания ультразвукового поля, области применимости и сложности необходимых вычислений. Одной из распространенных моделей является параболическое приближение дифракции, справедливое при малых углах фокусировки излучателя. Однако для достижения очень больших давлений в фокусе излучателя делают сильно сфокусированными и тогда напрямую параболическую модель дифракции использовать нельзя. Недавно было показано, что улучшить точность стандартной параболической модели можно при помощи модификации граничного условия путем подбора параметров эквивалентного излучателя [2]. Другой способ преодоления ограничения малых углов является обобщение параболической модели на случай больших углов фокусировки пучка при помощи Паде аппроксимаций точного дифракционного оператора [3]. Такое представление дифракционного оператора называется широкоугольной моделью. В данной

работе на основе широкоугольной модели был построен численный алгоритм, выполняющий расчет поля аксиально–симметричного источника. Проведено сравнение результатов моделирования поля, создаваемого ультразвуковым аксиально–симметричным источником с помощью трёх моделей: точного решения с помощью интеграла Рэлея, параболического приближения дифракции и широкоугольной модели.

В качестве примера в работе исследуется поле одиночного излучателя в виде сферического сегмента с апертурой  $a = 5$  см, фокусным расстоянием  $F = 9$  см, и частотой  $f = 1$  МГц. Половинный угол фокусировки такого излучателя составляет  $\theta = 33.7^\circ$ , а коэффициент линейного усиления давления в фокусе по сравнению с давлением на поверхности излучателя — 64.

Сначала был выполнен расчет поля с помощью интеграла Рэлея [4]:

$$p(r) = -i\rho_0 c_0 \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{u(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS \quad (1)$$

Здесь  $p$  — комплексная амплитуда акустического давления в точке наблюдения с радиус–вектором  $\mathbf{r}$ ,  $u$  — амплитуда нормальной компоненты скорости излучающей поверхности,  $\mathbf{r}'$  — радиус–вектор элемента поверхности  $dS$ ,  $k = \omega/c_0$  — волновое число,  $\rho_0$  — плотность среды,  $c_0$  — скорость звука. Интегрирование ведется вдоль поверхности  $S$ , представляющей собой сегмент сферы, ограниченный полярным углом  $\theta$  (рис. 1).

Следующие рассматриваемые методы основываются на численном решении приближенных уравнений, получаемых из уравнения Гельмгольца [5]:

$$\Delta p + k^2 p = 0. \quad (2)$$

<sup>\*</sup>E-mail: mezdrokhin@mail.ru

<sup>†</sup>E-mail: petr@acs366.phys.msu

<sup>‡</sup>E-mail: vera@acs366.phys.msu

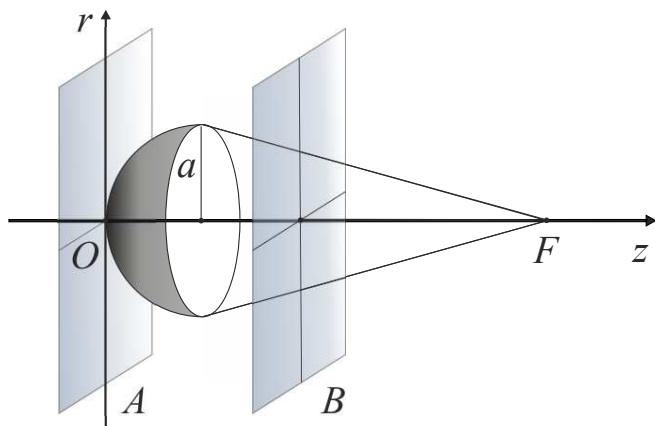


Рис. 1: Геометрия ультразвукового излучателя с апертурой  $2a$ , и фокусным расстоянием  $F$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа. Для медленно меняющейся амплитуды давления волны  $p(z, r) = \phi(z, r)e^{ikz}$ , распространяющейся преимущественно в направлении оси  $z$ , уравнение Гельмгольца может быть представлено в виде [3, 6]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = ik \left( \sqrt{1 + \hat{L}} - 1 \right) \phi, \quad (3)$$

где дифференциальный оператор  $\hat{L}$  равен поперечному Лапласиану  $\Delta_{\perp}$ , нормированному на  $k^2$ . Для аксиально-симметричного пучка этот оператор имеет вид:

$$\hat{L} = \frac{\Delta_{\perp}}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), \quad (4)$$

где  $r$  — радиальная координата. Оператор  $\hat{Q} = \sqrt{1 + \hat{L}}$  является псевдодифференциальным оператором и представим в виде разложения в ряд Тейлора по оператору  $\hat{L}$ :

$$\hat{Q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{L}^n. \quad (5)$$

При отбрасывании всех членов ряда, кроме первого и нулевого  $\hat{Q} \approx 1 + \hat{L}/2$ , из уравнения (3) можно получить стандартное параболическое уравнение [5]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right). \quad (6)$$

Для вывода широкоугольного параболического уравнения используется следующий прием [3]. Если оператор  $\hat{Q} = \sqrt{1 + \hat{L}}$  не зависит от координаты  $z$ , то решение уравнения (3) на шаге  $z + \Delta z$  выражается через решение на шаге  $z$  как:

$$\phi(z + \Delta z, r) = \exp \left[ ik \Delta z \left( \sqrt{1 + \hat{L}} - 1 \right) \right] \phi(z, r), \quad (7)$$

где оператор  $\hat{A} = \exp \left[ ik \Delta z \left( \sqrt{1 + \hat{L}} - 1 \right) \right]$  называется пропагатором. Также как и оператор  $\hat{Q}$ , пропагатор  $\hat{A}$  может быть представлен в виде ряда Тейлора по оператору  $\hat{L}$  или аппроксимирован несколькими первыми членами ряда Тейлора. Однако, слагаемые ряда Тейлора  $\hat{L}^n$  высокого порядка неудобны при решении уравнения с помощью численных методов. Поэтому пропагатор представляют в виде отношения двух полиномов степени  $N$ , т. е. в виде аппроксимации Паде:

$$\hat{A} = \frac{a_0 + a_1 \hat{L} + \dots + a_N \hat{L}^N}{b_0 + b_1 \hat{L} + \dots + b_N \hat{L}^N}. \quad (8)$$

Коэффициенты аппроксимации Паде могут быть найдены, если известны коэффициенты слагаемых ряда Тейлора до номера  $2N$  включительно. Для последующего решения пропагатор  $\hat{A}$  представляется в виде:

$$\hat{A} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 + \mu_n \hat{L}) / b_0 \prod_{n=1}^N (1 + \nu_n \hat{L}), \quad (9)$$

где  $\mu_n = -1/\alpha_n$ ,  $\nu_n = -1/\beta_n$ , а  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  — корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе аппроксимации Паде. Такое представление пропагатора допускает на каждом шаге  $\Delta z$  итеративную процедуру решения вида:

$$(1 + \nu_n \hat{L}) \phi^{n+1}(z + \Delta z, r) = (1 + \mu_n \hat{L}) \phi^n(z, r). \quad (10)$$

В данном уравнении дифференциальный оператор второго порядка  $\hat{L}$  входит только в первой степени, что позволяет строить простые конечно-разностные схемы для численного решения. Так, в данной работе использовалась схема Кранка–Николсона.

Для параболической и широкоугольной моделей необходимо задание начальных условий на некоторой плоскости, расположенной перпендикулярно оси пучка (рис. 1). Для параболического уравнения начальное поле, как правило, задается в плоскости  $z = 0$  и описывается выражением:

$$\begin{aligned} p(r, 0) &= p_0 \exp(-ik_0 r^2 / 2F), \quad r \leq a \\ p(r, 0) &= 0, \quad r > a. \end{aligned} \quad (11)$$

В широкоугольной модели начальное поле с помощью интеграла Рэля рассчитывается на плоскости, лежащей между источником и фокусом, (рис. 1 плоскость А), а затем переносится на плоскость  $z = 0$  методом углового спектра.

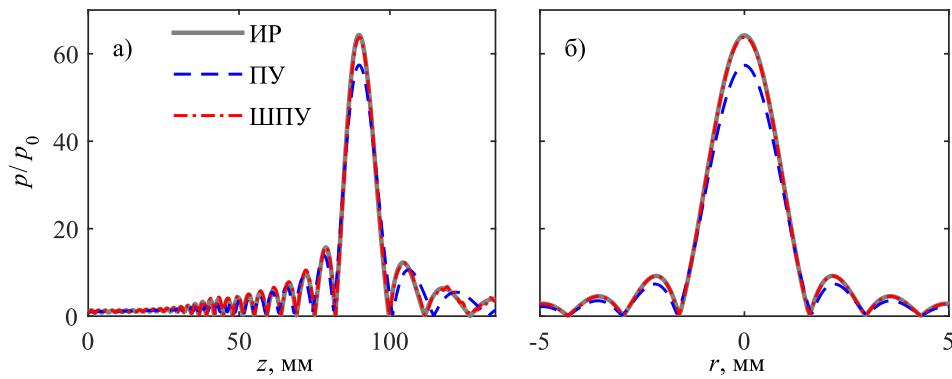


Рис. 2: Распределение амплитуды давления, нормированной на давление на поверхности излучателя, вдоль продольной оси  $z$  (а), и в фокальной плоскости вдоль поперечной оси  $r$  (б). Решения были получены с помощью интеграла Рэлея (ИР), и с использованием параболического уравнения (ПУ) или широкоугольного параболического уравнения (ШПУ)

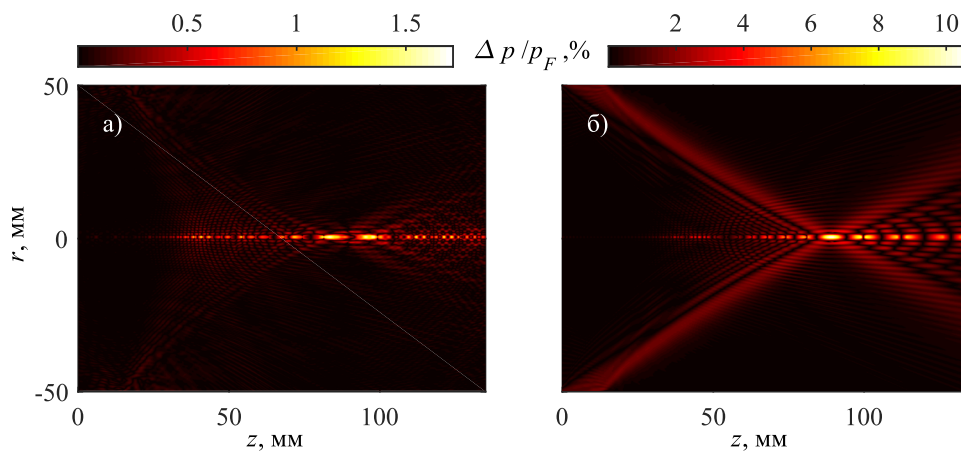


Рис. 3: Разница амплитуды давления, отнесенная к амплитуде давления в фокусе, между приближенным и точным решениями для широкоугольной модели (а) и для параболического уравнения (б)

Результаты расчета амплитуды давления на оси излучателя различными методами представлены на рис. 2. Видно, что решение, полученное в широкоугольной модели (ШПУ) при разложении оператора до порядка  $N = 4$ , практически не отличается от решения, полученного с помощью интеграла Рэлея (ИР). В то же время, решение, полученное в рамках параболического уравнения дифракции, дает заниженное значение амплитуды в фокусе. Также, положения вторичных минимумов и максимумов в стандартной параболической модели оказываются смещенными. На рис. 3 в плоскости  $zr$  показано различие между амплитудой давления, рассчитанной помощью интеграла Рэлея, и в широкоугольной (а) или стандартной (б) параболической модели. Разница амплитуд нормирована на значение амплитуды в фокусе. Видно, что в широкоугольной модели относительная ошибка не превышает 1.7%, в то время как стандартная параболическая

модель отличается от точного решения более чем на 10%. Важно отметить, что при модификации граничных условий стандартной параболической модели поле в фокусе описывается точно, а относительная ошибка сокращается до 3% вблизи фокальной перетяжки и 6% во всем пространстве [2].

Таким образом, широкоугольная параболическая модель при расчете поля сильно сфокусированного излучателя оказывается существенно точнее стандартной параболической модели и приближается к точному решению, полученному на основе интеграла Рэлея. При этом время расчета по широкоугольной параболической модели сравнимо с временем расчета по стандартному параболическому уравнению, что позволяет значительно быстрее получить поле излучателя, чем при помощи интеграла Рэлея.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-12-00974.

- [1] Хилл К., Бэмбер Дж., тер Хаар Г. (ред.). Ультразвук в медицине. Физические основы применения. М.: Физматлит. 2008.
- [2] Росницкий П.Б. Акустический журнал. **62**, № 2. С. 153. (2016).
- [3] Yevick D., Thomson D.J. J. Acoust. Soc. Am. **108**. N 6. P. 2784. (2000).
- [4] Rayleigh J. W. S. The theory of sound. Dover, New York, 1945. II. P. 47. (1945).
- [5] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. 1979.
- [6] Collins M. D. J. Acoust. Soc. Am. **93**, N 6. Pt. 1. P.1736. (1993).

## Numerical modeling of axially symmetric focused fields generated by ultrasound surgery transducers using a wide-angle parabolic approximation

I. S. Mezdrokhin<sup>a</sup>, P. V. Yuldashev<sup>b</sup>, V. A. Khokhlova<sup>c</sup>

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>mezdrokhin@mail.ru, <sup>b</sup>petr@acs366.phys.msu, <sup>c</sup>vera@acs366.phys.msu

A numerical algorithm for calculating ultrasound fields radiated from axially symmetric focused sources was developed on the basis of a wide-angle parabolic approximation of the Helmholtz equation. A numerical solution for the field of an axially symmetric spherical radiator with an aperture of  $a = 5$  cm, focal length  $F = 9$  cm, and the frequency  $f = 1$  MHz was obtained. The solution was compared to those obtained using the full diffraction formulation and with conventional parabolic equation. The results showed that the relative error in pressure amplitude at the focus was 1–2 % for a wide-angle parabolic approximation and 10–12 % for the conventional parabolic approximation comparing to the exact Rayleigh integral solution. Calculation time for a wide-angle model was comparable to conventional parabolic model, and was an order of magnitude less than calculating the exact solution using the Rayleigh integral.

PACS: 43.20.Bi

Keywords: Focused ultrasound, Rayleigh integral, Helmholtz equation, parabolic equation, wide-angle parabolic approximation, numerical modeling.

### Сведения об авторах

1. Мездрохин Илья Сергеевич — студент; e-mail: mezdrokhin@mail.ru.
2. Юлдашев Петр Викторович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: petr@acs366.phys.msu.ru.
3. Хохлова Вера Александровна — доктор физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: vera@acs366.phys.msu.ru.