Квази–ортогональное и квази–коллинеарное акустооптическое взаимодействие в поглощающей среде

П. А. Никитин,* В. Б Волошинов†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Разработана теория акустооптического взаимодействия (АОВ) в анизотропной среде, учитывающая поглощение электромагнитных волн и затухание акустических волн. Получены выражения для оптимальной длины и полосы АОВ. Предсказан невзаимный эффект, присущий только обратной коллинеарной дифракции.

PACS: 78.20.hb УДК: 534.522+535.42
Ключевые слова: акустооптика, невзаимный эффект, двумерная теория.

Явление взаимодействия электромагнитных и акустических волн было экспериментально обнаружено в начале прошлого века. Оно обусловлено изменением диэлектрической проницаемости среды под действием акустической волны. Таким образом, необходимо решить уравнения Максвелла с диэлектрической проницаемостью, зависящей от координаты. В случае больших углов отклонения дифрагированного излучения задача не сводится к одномерной [1]. Целью данной работы является обобщение математического аппарата на случай поглощения электромагнитных волн в среде, что особенно актуально для излучения терагерцового (ТГц) диапазона [2]. Отметим, что подобный аппарат предложен в работе [3], однако полученные в ней уравнения менее наглядны при тех же допущениях.

В рамках двумерной модели будем считать, что волновые и лучевые вектора всех взаимодействующих волн лежат в одной плоскости. В противном случае задача становится трёхмерной. Указанное допущение равносильно тому, что электрическое поле может иметь только два вида линейной поляризации: 1) $\mathbf{e}^{\|}$ лежит в плоскости, содержащей волновые векторы (плоскость АОВ); 2) $\mathbf{e}^{\perp}$ ортогонален этой плоскости.

Будем искать решение волнового уравнения в виде собственных волн среды с медленно меняющимися амплитудами, зависящими от двух координат:

$$\mathbf{E}(x,z,t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{e}^{\perp}\frac{C_p^{\perp}(x,z)}{\sqrt{n^{\perp}}}e^{-\alpha_p^{\perp}\mathbf{r}/2}e^{i(\mathbf{k}_p^{\perp}\mathbf{r}-\omega_p t)}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{e}^{\perp}\frac{C_p^{\|}(x,z)}{\sqrt{n_p^{\|}\cos\beta_p}}e^{-\alpha_p^{\|}\mathbf{r}/2}e^{i(\mathbf{k}_p^{\|}\mathbf{r}-\omega_p t)}\right), \tag{1}$$

где n — показатель преломления, β_p — угол между волновым вектором $\mathbf{k}_p^{\|}$ и лучевым вектором для волны, имеющей поляризацию $\mathbf{e}_p^{\|}$ (для $\mathbf{e}^{\perp}$ этот угол равен нулю), $\boldsymbol{\alpha}$ — векторный коэффициент поглощения, зависящий от направления распространения и поляризации волны.

Подставим пробное решение в волновое уравнение с возмущённой диэлектрической проницаемостью $\Delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\cos(\mathbf{Kr}-\Omega t)$, а также пренебрежём членами вида $[\boldsymbol{\alpha}[\nabla C\mathbf{e}]]$ и $[\nabla C[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}]]$ по сравнению с $[\mathbf{k}[\nabla C\mathbf{e}]]$ и $[\nabla C[\mathbf{ke}]]$ ввиду того, что $|\boldsymbol{\alpha}| << |\mathbf{k}|$ при величине α порядка 1 см$^{-1}$. Работая в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, мы не будем учитывать влияния членов вида $[\nabla C[\nabla C\mathbf{e}]]$, тем самым пренебрегая дифракцией светового пучка на собственной апертуре. Кроме вышеперечисленного необходимо наложить ограничение $\omega_p=\omega_0+p\Omega$ на частоту света в p дифракционном порядке для существования стационарного во времени решения.

Следует отметить, что в некоторых случаях множитель $\exp(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}/2)$ отсутствует в аналитическом решении, например, при обратной коллинеарной дифракции. Поэтому, если после громоздких преобразований подставить в систему уравнений связанных мод решение $\left\{C_p^{\|(*)},\ C_p^{\perp(*)}\right\}$ в виде $C_p^{\|(*)}\exp\left(\boldsymbol{\alpha}_p^{\|}\mathbf{r}/2\right)$ и $C_p^{\perp(*)}=C_p^{\perp}\exp\left(\boldsymbol{\alpha}_p^{\perp}\mathbf{r}/2\right)$, то выражения для напряженности электрического поля и плотности потока энергии существенно упрощаются:

$$\mathbf{E}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{e}^{\perp}\frac{C_p^{\perp}}{\sqrt{n^{\perp}}}e^{i(\mathbf{k}_p^{\perp}\mathbf{r}-\omega_p t)}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{e}^{\perp}\frac{C_p^{\|}}{\sqrt{n_p^{\|}\cos\beta_p}}e^{i(\mathbf{k}_p^{\|}\mathbf{r}-\omega_p t)}\right),\quad \frac{4\pi}{c}\left|\mathbf{S}_p\right|=\left|C_p\right|^2. \tag{2}$$

В итоге мы приходим к наиболее удобной форме уравнений связанных мод:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{m}_p^{\perp}\,\vec{\nabla}\,C_p^{\perp}\right)&=i\tfrac{q^{\perp}}{2}\left(C_{p-1}^{\perp}e^{-i\boldsymbol{\eta}_{p-1}^{\perp}\mathbf{r}}+C_{p+1}^{\perp}e^{i\boldsymbol{\eta}_p^{\perp}\mathbf{r}}\right)+i\tfrac{q_{p-1}^{A}}{2}C_{p-1}^{\|}e^{-i\boldsymbol{\eta}_{p-1}^{\|\perp}\mathbf{r}}+i\tfrac{q_{p+1}^{A}}{2}C_{p+1}^{\|}-A_p^{\perp}C_p^{\perp}\\ \left(\mathbf{s}_p^{\|}\,\vec{\nabla}\,C_p^{\|}\right)&=\tfrac{q_{p-1}^{\|}}{2}C_{p-1}^{\|}e^{-i\boldsymbol{\eta}_{p-1}^{\|}\mathbf{r}}+i\tfrac{q_p^{\|}}{2}C_{p+1}^{\|}e^{i\boldsymbol{\eta}_p^{\|}\mathbf{r}}+i\tfrac{q_p^{A}}{2}\left(C_{p-1}^{\perp}e^{-i\boldsymbol{\eta}_{p-1}^{\perp\|}\mathbf{r}}+C_{p+1}^{\perp}e^{i\boldsymbol{\eta}_p^{\|\perp}\mathbf{r}}\right)-A_p^{\|}C_p^{\|}\end{aligned}, \tag{3}$$

где введены обозначения $A_p^{\perp}=(\mathbf{m}_p^{\perp}\boldsymbol{\alpha}_p^{\perp})/2$ и $A_p^{\parallel}=(\mathbf{s}_p^{\parallel}\boldsymbol{\alpha}_p^{\parallel})/2$. Выражения для коэффициентов связи q и расстроек $\boldsymbol{\eta}$ приведены в работе [1]. Из данной системы уравнений следует, что:

1) амплитуда электромагнитной волны изменяется в направлении её групповой скорости;

2) это изменение пропорционально амплитудам электромагнитных волн в соседних дифракционных порядках;

3) по мере распространения волны её амплитуда экспоненциально уменьшается вследствие поглощения в среде.

Рассмотрим квази–ортогональную и квази–коллинеарную геометрию АОВ.

При квази–ортогональной геометрии волновой вектор акустической волны ортогонален волновым векторам дифрагированных электромагнитных волн и задача является одномерной. Можно показать, что в аналитических выражениях для интенсивностей в нулевом I_0 и первом I_1 порядках появляется дополнительный множитель $\exp(-\alpha L)$, где L — длина области АОВ. Поскольку данный множитель не зависит от величины расстройки, то он не повлияет на величину полосы АОВ. При заданной мощности акустической волны коэффициент связи q зависит от длины L как $q = A/\sqrt{L}$, где А — константа. Введём следующие параметры $X_{ort} = \alpha/A^2$, $Y_{ort} = A^2L$, где первый из них — безразмерный коэффициент поглощения, а второй — безразмерная длина АО взаимодействия:

$$I_{\pm1} = \frac{Y_{ort}}{4}\mathrm{sinc}^2\left[\frac{\sqrt{Y_{ort}(1+Z_{ort}^2Y_{ort})}}{2}\right]\exp(-X_{ort}Y_{ort}). \tag{4}$$

Как видно из выражения (4), величина полосы АОВ ΔZ_{ort} не зависит от X_{ort} и даётся выражением $\Delta Z_{ort} = 0.88\pi/Y_{ort}$. Очевидно, что существует оптимальное значение Y_{ort}^{opt}, при котором I_1 достигает максимальной величины. Численный расчёт показывает, что с точностью 5 % можно использовать следующие соотношения:

$$Y_{ort}^{opt} = \frac{\pi^2}{1+\pi^2X_{ort}}, \quad I_1^{opt} = \frac{1}{1+4e\cdot X_{ort}}. \tag{5}$$

Другим приближением, позволяющим свести двумерные уравнения к одномерным, является квази–коллинеарная геометрия АОВ, когда волновой вектор акустической волны практически параллелен волновым векторам дифрагированных электромагнитных волн. Введём безразмерные коэффициенты $X = \alpha/q$, $Y = qL$, имеющие тот же смысл, что и ранее, а также $W = \alpha_s/q$, где α_s — коэффициент затухания акустической волны. При квази–коллинеарной дифракции имеет место проблема расположения пьезопреобразователя таким образом, чтобы он не препятствовал распространению пучка электромагнитных волн. Как правило, она решается за счёт использования отражения акустической волны от боковой грани кристалла. Рассмотрим две конфигурации:

1) до отражения акустическая волна проходит небольшое расстояние и её затуханием на этом отрезке можно пренебречь, а общий путь составляет $l = L$;

2) угол падения акустической волны достаточно мал, вследствие чего она проходит до отражения примерно такой же путь, как и после отражения, и $l = 2L$.

Запишем выражения для $I_{\pm1}$ и Y^{opt}:

$$\begin{aligned} l = L:\quad & I_{\pm1} = \exp(-XY)\sin^2\left\{\frac{1}{W}\left[1-\exp\left(-\frac{WY}{2}\right)\right]\right\}, & Y^{opt} = \frac{2}{W}\ln\left(1+\frac{W}{X}\right), \\ l = 2L:\quad & I_{\pm1} = \exp(-XY)\sin^2\left\{\exp\left(-\frac{WY}{2}\right)\frac{1}{W}\left[1-\exp\left(-\frac{WY}{2}\right)\right]\right\}, & Y^{opt} = \frac{2}{W}\ln\left(1+\frac{W}{X+W}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Аппроксимация методом наименьших квадратов дала следующее универсальное выражение с относительной точностью 6%:

$$\Delta Z = \sqrt[4]{\left(\frac{0.88\pi}{Y}\right)^4 + \left(\frac{W}{2}\right)^4}. \tag{7}$$

Другой разновидностью коллинеарного АОВ является обратная квази–коллинеарная дифракция, при которой волновой вектор акустической волны примерно в два раза больше волнового вектора электромагнитной волны. Запишем аналитические решения для различных взаимных ориентаций волновых векторов $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{K}$ и общего пути l, проходимого акустической волной:

1) $l = L$, $\mathbf{k}_0 \uparrow\uparrow \mathbf{K}$:

$$\nu \le \frac{1}{2}: \quad I_{-1} = \left[\frac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_2)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) - I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_2)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_2)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) + I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_2)}\right]^2; \tag{8}$$

$$\nu > \frac{1}{2}: \quad I_{-1} = \left[\frac{I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x_2)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) - I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_2)}{I_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_2)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) + I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_2)}\right]^2. \tag{9}$$

2) $l = L$, $\mathbf{k}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{K}$:

$$I_1 = \left[\frac{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_2)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_1) - I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_2)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_2)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) + I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_2)}\right]^2. \tag{10}$$

3) $l = 2L$, $\mathbf{k}_0 \uparrow\uparrow \mathbf{K}$:

$$\nu \le \frac{1}{2}: \quad I_{-1} = \left[\frac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) - I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)}{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_1) + I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)}\right]^2; \tag{11}$$

$$\nu > \frac{1}{2}: \quad I_{-1} = \left[\frac{I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x_3)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_1) - I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)}{I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x_3)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_1) + I_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)}\right]^2. \tag{12}$$

4) $l = 2L$, $\mathbf{k}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{K}$:

$$I_1 = \left[\frac{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_3)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_1) - I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_3)}{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)K_{-\nu+\frac{1}{2}}(x_1) + I_{\nu-\frac{1}{2}}(x_1)K_{\nu+\frac{1}{2}}(x_3)}\right]^2, \tag{13}$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $\nu = X/W$, $x_1 = \exp(-WY/2)/W$, $x_2 = 1/W$ и $x_3 = \exp(-WY)/W$.

Как показано в работе [4], полоса ΔZ при малых значения X и W описывается квадратичной функцией, а при больших — линейной. Детальное исследование показало, что в этом случае погрешность может достигать 15%. Поэтому было предложено использовать аппроксимацию гиперболой четвёртой степени $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + b_0^4}$, что снизило погрешность до 6%:

$$\mathbf{k}_0 \uparrow\uparrow \mathbf{K} : \Delta Z = \sqrt[4]{\left(X + \frac{W}{2}\right)^4 + \left[\left(\frac{0.88\pi}{Y}\right)^2 + 1.1^2\right]^2};$$
$$\mathbf{k}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{K} : \Delta Z = \sqrt[4]{\left(X - \frac{W}{2}\right)^4 + \left[\left(\frac{0.88\pi}{Y}\right)^2 + 1.1^2\right]^2}. \tag{14}$$

В работе предложена математическая двумерная модель, описывающая АОВ в поглощающей среде с учётом поляризации электромагнитных волн и произвольной структуры акустического поля, а также проведено систематическое исследование АОВ при различных геометриях. Полученные аналитические выражения позволили определить оптимальную длину АОВ, а также предсказать наличие невзаимного эффекта при обратной коллинеарной дифракции при повороте АОЯ на 180°. С помощью численного моделирования получены выражения для полосы АОВ. Результаты работы могут быть использованы для проектирования акустооптических устройств с оптимальными характеристиками.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-12-00380.

[1] *Дьяконов Е. А., Волошинов В. Б.* Радиотехника и электроника. **59**, № 5. С. 498. (2014).

[2] *Волошинов В. Б.* и др. Квантовая электроника. **43**,

№ 12. С. 1139. (2013).
[3] *Montemezzani G., Zgonik M.* Phys. Rev. E. **55**, N 1. P. 1035. (1997).
[4] *Nikitin P. A., Voloshinov V. B./* Physics Procedia. **70**. P. 712. (2015).

Quasi–orthogonal and quasi–collinear acoucto–optic interaction in absorbing medium

P. A. Nikitin[a], **V. B. Voloshinov**[b]

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*nikitin.pavel.a@gmail.com,* [b]*volosh@phys.msu.ru*

A theory of acousto–optic interaction (AOI) in anisotropic medium, taking into account absorption of electromagnetic waves and attenuation of acoustic waves, has been developed. Expressions for optimal length and bandwidth of the AOI were derived. A non–reciprocal effect inherent only in the backward collinear diffraction was discovered.

PACS: 78.20.hb
Keywords: acousto-optics, non-reciprocal effect, two-dimensional theory.

Сведения об авторах

1. Никитин Павел Алексеевич — мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-44-04, e-mail: nikitin.pavel.a@gmail.com.
2. Волошинов Виталий Борисович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-44-04, e-mail: volosh@phys.msu.ru.