Математическая модель прямоугольной волноведущей системы с импедансными стенками

А. И. Ерохин,* И. Е. Могилевский, В. Е. Родякин, В. М. Пикунов
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Рассматривается математическая модель прямоугольного волновода с импедансными стенками, на которых ставятся граничные условия Щукина–Леонтовича. Для данных граничных условий полное электромагнитное поле волновода не разделяется на поля электрического и магнитного типов, поэтому требуется учитывать гибридные моды. Предлагается новый базис для представления компонент полного электромагнитного поля прямоугольного волновода, для которого точно удовлетворяются импедансные граничные условия. Для амплитуд указанного разложения получается жесткая СОДУ.

PACS: 41.20.Jb УДК: 621.372.822
Ключевые слова: волноведущая система, условия Щукина–Леонтовича, неполный метод Галеркина, импедансные стенки.

Электромагнитные колебания в волноведущей системе описываются решением уравнений Максвелла, удовлетворяющим граничному условию, которое ставится на металлической поверхности, ограничивающей систему. Простейшей моделью является ситуация, когда металл представляет собой идеальный проводник, и на поверхности волновода касательная составляющая вектора электрической напряженности обращается в нуль, т. е. в математической модели на границе области ставится условие Дирихле:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_S = 0, \end{cases}$$

где S— боковая поверхность волновода.

В работе [1] строго доказано, что любое поле в регулярном волноводе в области, свободной от внешних токов и зарядов, может быть представлено в виде суперпозиции поперечно–магнитных (ТМ) и поперечно–электрических (ТЕ) волн. В случае волновода прямоугольного сечения $S_\perp \in (0,a)\times(0,b)$ базисные функции, по которым раскладываются поперечные компоненты электромагнитного поля имеют вид:

(e) — электрический тип ТМ:

$$\begin{cases} \Delta_\perp f^{(e)}_{nm} + \kappa^2_{nm} f^{(e)}_{nm} = 0, \ (x,y) \in (0,a)\times(0,b), \\ f^{(e)}_{nm}\Big|_{x=0;a} = f^{(e)}_{nm}\Big|_{y=0;b} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\kappa_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \quad n = \overline{1,N}, m = \overline{1,M},$$

$$f^{(e)}_{nm} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(\frac{\pi n}{0} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y),$$

$$\mathbf{G}^{(e2)}_{n,m} = \frac{\nabla f^{(e)}_{nm}}{\kappa_{nm}}, \quad \mathbf{G}^{(h3)}_{nm} = \left[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{G}^{(e2)}_{nm}\right],$$

(h) — магнитный тип ТЕ:

$$\begin{cases} \Delta_\perp f^{(h)}_{nm} + \kappa^2_{nm} f^{(h)}_{nm} = 0, \ (x,y) \in (0,a)\times(0,b), \\ \dfrac{\partial f^{(h)}_{nm}}{\partial x}\Bigg|_{x=0;a} = \dfrac{\partial f^{(h)}_{nm}}{\partial y}\Bigg|_{y=0;b} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\kappa_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2},$$
$$n = \overline{n_0, N}, \ m = \overline{m_0, M}, n_0 + m_0 = 1,$$

$$f^{(h)}_{nm} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos(\frac{\pi n}{0} x) \cos(\frac{\pi m}{b} y),$$

$$\mathbf{G}^{(h2)}_{n,m} = \frac{\nabla f^{(h)}_{nm}}{\kappa_{nm}}, \quad \mathbf{G}^{(e3)}_{nm} = \left[\mathbf{G}^{(h2)}_{nm} \mathbf{z}_0\right].$$

Данный базис также можно использовать при построении приближенного решения с помощью неполного метода Галеркина [2–4].

Однако модель идеально проводящей поверхности может быть использована только в очень узком классе физических задач без потерь или является «первым приближением» для решения задачи, описывающей поведение системы, ограниченной реальной металлической поверхностью с потерями. В этом случае хорошей моделью служат граничные условия Щукина–Леонтовича [5], дающие связь между касательными составляющими к поверхности S векторов напряженности электрического и магнитного поля:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S = -Z_s \left[\mathbf{n}\left[\mathbf{n}, \mathbf{H}\right]\right]|_S, \tag{3}$$

где $Z_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_0}}(1-j)$ — поверхностный импеданс металла, σ_0 — удельная проводимость на постоянном токе.

*E-mail: forlector@mail.ru

Для поверхностей $y = 0; b,\ x \in [0, a]$, $\mathbf{n} = \mp \mathbf{y}_0$:

$$E_x = \pm Z_s H_z, \quad E_z = \mp Z_s H_x. \tag{4}$$

Для поверхностей $x = 0; a,\ \ y \in [0, b]$, $\mathbf{n} = \mp \mathbf{x}_0$:

$$E_y = \pm Z_s H_z, \quad E_z = \mp Z_s H_y. \tag{5}$$

В случае импедансных граничных условий на боковой поверхности не удается разделить полное электромагнитное поле волновода на поля электрического и магнитного типов, поэтому возникает необходимость рассматривать гибридные моды. При граничных условиях (3) базис в виде ТМ и ТЕ волн уже не может быть использован напрямую для решения задачи нахождения электромагнитных полей, поскольку базисные векторы не удовлетворяет граничным условиям, и приходится использовать приближенные методы [5].

В данной работе рассматривается прямоугольный волновод, для которого предлагается новый базис, который строится путем добавления к указанному выше базису конечного числа дополнительных функций. Они являются ортогональными по отношению к неполным базисам ТЕ и ТМ волн. Кроме того, амплитуды при этих функциях определяются из импедансных граничных условий. Дополнительные базисные функции имеют вид:

$$\mathbf{G}^{(ex)}_{n,m} = \mathbf{x}_0 \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\frac{\pi n}{a} x \left(\left(\frac{.5b - y}{.5b} \right)^{m-1} - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{M} \frac{2\beta_{km}}{b} \sin\frac{\pi k}{b} y \right),$$
$$\beta_{km} = \int_0^b \left(\frac{.5b - y}{.5b} \right)^{m-1} \sin\frac{\pi k}{b} y dy;$$

$$\mathbf{G}^{(ey)}_{n,m} = \mathbf{y}_0 \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\frac{\pi m}{b} y \left(\left(\frac{x - .5a}{.5a} \right)^{n-1} - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{N} \frac{2\alpha_{kn}}{a} \sin\frac{\pi k}{a} x \right),$$
$$\alpha_{kn} = \int_0^b \left(\frac{.5a - x}{.5a} \right)^{n-1} \sin\frac{\pi k}{a} x dx;$$

Поперечные компоненты электромагнитного поля волновода представляются в виде линейной комбинации элементов усовершенствованного базиса и точно удовлетворяют импедансным граничным условия:

$$\mathbf{H}_\perp = \sum_{nm} (W^{(h2)}_{nm}(z)\, \mathbf{G}^{(h2)}_{nm} + W^{(h3)}_{nm}(z)\, \mathbf{G}^{(h3)}_{nm}),$$

$$\mathbf{E}_\perp = \sum_{nm} (W^{(e2)}_{nm}(z)\, \mathbf{G}^{(e2)}_{nm} + W^{(e3)}_{nm}(z)\, \mathbf{G}^{(e3)}_{nm})+$$
$$+ \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} (1 - \delta_{0n}\delta_{0m}) V^{(ex)}_{nm} \mathbf{G}^{(ex)}_{n,m} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} (1 - \delta_{0n}\delta_{0m}) V^{(ey)}_{nm}\, \mathbf{G}^{(ey)}_{nm}.$$

Из проекционных соотношений для уравнений Максвелла и граничных условий получается жесткая линейная СОДУ:

$$\frac{dW^{(e3)}_{nm}}{dz} = -i\omega\mu_0 W^{(h2)}_{nm} + \oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}^{(e3)}_{nm} \mathbf{n}\, dc,$$

$$\frac{dW^{(e2)}_{nm}}{dz} = -i\omega\mu_0 \left(1 - \frac{\kappa^2_{nm}}{(\omega/c)^2} \right) W^{(h3)}_{nm} + \oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}^{(e2)}_{nm} \mathbf{n} dc,$$

$$\frac{dW^{(h2)}_{nm}}{dz} = -i\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\kappa^2_{nm}}{(\omega/c)^2} \right) W^{(e3)}_{nm} +$$
$$+ \frac{\kappa_{nm}}{i\omega\mu_0} \oint_{C_\perp} \mathbf{E}_\perp \left(\mathbf{n} \times \mathbf{z}_0 \right) f^{(h)}_{nm} dl,$$

$$\frac{\partial W^{(h3)}_{nm}}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0 W^{(e2)}_{nm},$$

где контурные интегралы вычисляются аналитически:

$$\oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}^{(e3)}_{nm} \mathbf{n}\, dc =$$
$$= -\frac{\pi n}{\kappa_{nm} b} \sum_{m'=0}^{M} \left(1 + (-1)^{m+m'} \right) V^{(e\,zy)}_{nm'} -$$
$$- \frac{\pi\, m}{\kappa_{nm} a} \sum_{n'=0}^{N} \left(1 + (-1)^{n+n'} \right) V^{(e\,zx)}_{n'm},$$

$$\oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}^{(e2)}_{nm} \mathbf{n}\, dc =$$
$$= \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} \sum_{m'=0}^{M} V^{(e\,zy)}_{nm'}(z) \left(1 + (-1)^{m+m'} \right) +$$
$$+ \frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} \sum_{n=0}^{N} V^{(e\,zx)}_{n'm}(z) \left(1 - (-1)^{n+n'} \right),$$

$$\oint_{C_\perp} \mathbf{E}_\perp \left(\mathbf{n} \times \mathbf{z}_0 \right) f^{(h)}_{nm} dl =$$
$$= -Z_s \frac{2}{b} \sum_{m'=0}^{M} \left(1 - \delta_{0n}\delta_{0m'} \right) \left(1 + (-1)^{m+m'} \right) W^{(h1)}_{nm'}(z) +$$
$$+ Z_s \frac{2}{a} \sum_{n'=0}^{N} \left(1 - \delta_{0n'}\delta_{0m} \right) \left(1 + (-1)^{n+n'} \right) W^{(h1)}_{n'm}(z).$$

Здесь:

$$V_{nm}^{(e\,zx)} = Z_s \left(\frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} W_{nm}^{(h2)}(z) - \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} W_{nm}^{(h3)}(z) \right),$$

$$V_{nm}^{(e\,zy)} = Z_s \left(\frac{\pi n}{\kappa_{nm} 0} W_{nm}^{(h2)}(z) + \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} W_{nm}^{(h3)}(z) \right),$$

$$W_{nm}^{h1} = -\frac{\kappa_{nm}}{i\omega\mu_0} W_{nm}^{(e3)} -$$

$$-\frac{Z_s}{i\omega\mu_0} \left\{ \frac{2}{b} \sum_{m'=0}^{M} (1 - \delta_{0n}\delta_{0m'}) \left[(-1)^{m+m'} - 1 \right] = \right.$$

$$\left. = W_{nm'}^{h1} - \frac{2}{a} \sum_{n'=0}^{N} (1 - \delta_{0n'}\delta_{0m}) \left[(-1)^{n+n'} - 1 \right] W_{n'm}^{h1} \right\}.$$

Таким образом, предложенный усовершенствованный базис для импедансного волновода при применении неполного метода Галеркина позволяет векторную задачу математического моделирования электромагнитного поля в реальной волноведущей системе с потерями в стенках свести к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения.

Работа Ерохина А.И. выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-60084 мол_а_дк). Работа Могилевского И.Е. и Пикунова В.М. выполнена при при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-01-00690 А.)

[1] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* ЖТФ. **18**. С. 959. (1948).
[2] *Свешников А.Г., Могилевский И.Е.* Избранные математические задачи теории дифракции. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
[3] *Ильинский А.С.* и др. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
[4] *Пикунов В.М., Свешников А.Г.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Справочные приложения, базы и банки данных. **VII-1**. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. М.: ЯНУС-К. 2008. С. 534-567.
[5] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

Mathematical model of rectangular waveguide system with impedance wall

A. I. Erokhin[a], I. E. Mogilevsky[b], V. E. Rodyakin[c], V. M. Pikunov[d]

Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]forlector@mail.ru, [b]imogilevsky@mail.ru, [c]vrodyakin@mail.ru, [d]vmpikunov@mail.ru

Mathematical model for rectangular waveguide with impedance wall on which impedance Schukin–Leontovich boundary conditions are implemented is considered. Using these boundary conditions complete electromagnetic field in the waveguide is not divided into TE and TM fields and hybrids modes have to be taken into account. A new basis to represent components of complete electromagnetic field of a rectangular waveguide is suggested using witch impedance boundary conditions are satisfied exactly. Stiff system ODEs for amplitudes of this representation is a result.

PACS: 41.20.Jb.

Keywords: waveguide system, Schukin–Leontovich boundary conditions, incomplete Galerkin method, impedance wall.

Сведения об авторах

1. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: forlector@mail.ru.
2. Могилевский Илья Ефимович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: imogilevsky@mail.ru.
3. Родякин Владимир Евгеньевич — программист; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: vrodyakin@mail.ru.
4. Пикунов Виктор Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: vmpikunov@mail.ru.