Интерполяция, дифференцирование, интегрирование данных через Конечномерные Теоремы Отсчетов

Е.Н. Терентьев[1],* Н.Е. Терентьев[2]†

[1]*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

[2]*HiQo Solutions, Moscow, 135 Cedar St Richmond Hill, Georgia 31324*

При моделировании физических процессов, явлений в радиофизике, оптике предлагаем использовать Конечномерные Теоремы Отсчетов (КТО) вместо теоремы Винера–Котельникова и методов, основанных на разностных схемах. КТО операции совместимы со сверткой, аналитическими расчетами, оцениванием многократных интегралов.

PACS: 02.70.-c, 02.30. УДК: 519.652, 517.2, 517.3, 517.44

Ключевые слова: преобразование Фурье, свертка, интерполяция, дифференцирование, интегрирование.

При моделировании физических процессов, явлений в радиофизике, оптике предлагаем использовать Конечномерные Теоремы Отсчетов (КТО) вместо теоремы Винера-Котельникова [1] и методов, основанных на разностных схемах. КТО операции совместимы со сверткой, аналитическими расчетами, оцениванием многократных интегралов.

ВВЕДЕНИЕ

Принципиальное уточнение представления функции дискретным рядом Фурье состоит в том, что:

$$f(x0) = \sum c_k H^{(0)}(k, x0), \quad k = 1:N, \quad x0 = 0:N-1 \quad N - \text{четно}, \tag{1}$$

где $c_k = \big(f(x0), H^{(0)}(k, x0)\big)$ — Фурье коэффициенты, а $H^{(0)}(k, x0)$ — ортонормированные дискретные Фурье гармоники (2, 3).

$$H_k^{\cos^{(n)}(\pi x)} = \sqrt{\frac{1}{N}}\{\, \pi^n \cos(\pi x + n\frac{\pi}{2})\,\}, \quad H_k^{\cos^{(n)}(\rho_m x)} = \sqrt{\frac{2}{N}}\{\,(\rho_m)^n \cos(\rho_m x + n\frac{\pi}{2})\,\},\ \rho_m = \frac{2\pi}{N}m,\ \ m = \frac{N}{2}+1-k,$$
$$H_k^{con^{(n)}(x)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{cases} 0, & if\, n > 0 \\ 1, & if\, n = 0 \\ x^{-n}, & if\, n \le -1 \end{cases} \quad H_k^{\sin^{(n)}(\rho_m x)} = \sqrt{\frac{2}{N}}\{(\rho_m)^n \sin(\rho_m x + n\frac{\pi}{2})\},\ \ \rho_m = \frac{2\pi}{N}m,\ \ m = k - (\frac{N}{2}+1), \tag{2}$$

«Непрерывные функции» $f(x)$ получаются этим же рядом, но только с (малым шагом $dx < 1$оцифровки) «непрерывными гармониками» $H^{(0)}(k, x)$ (2, 3). Операции математического анализа и теории поля сводятся к операциям над Фурье гармониками$H^{(n)}(x0)$ и $H^{(n)}(x)$: при $n > 0$ реализуем дифференцирование n-го порядка и при $n < 0$ — интегрирование n-го порядка. Заметим, что n может быть не целым

$$\begin{matrix} H^{(n)}(x) = \\ H^{(n)}(k,x) = \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} H_k^{\cos^{(n)}(\pi x)}, \ if\ k = 1 \\ H_k^{\cos^{(n)}(\rho_m x)}, \ if\ k = 2:\frac{N}{2} \\ H_k^{con^{(n)}(x)}, \ if\ k = \frac{N}{2}+1 \\ H_k^{\sin^{(n)}(\rho_m x)}, \ if\ k = \frac{N}{2}+2:\ N \end{matrix} \right\}, \quad \begin{matrix} k = 1:N, \\ x0 = 0:N-1, \\ x = 0:dx:N-dx \end{matrix} \tag{3}$$

Фурье гармоники $H^{(n)}(x)$ ((3)) с производными и интегралами представлены на рис. 1 ниже.

КТО Дан массив (строка) отсчетов $D = f(x0)$, матрицы $H^{(0)}(x0)$ и $H^{(n)}(x)$ (3) тогда непрерывная

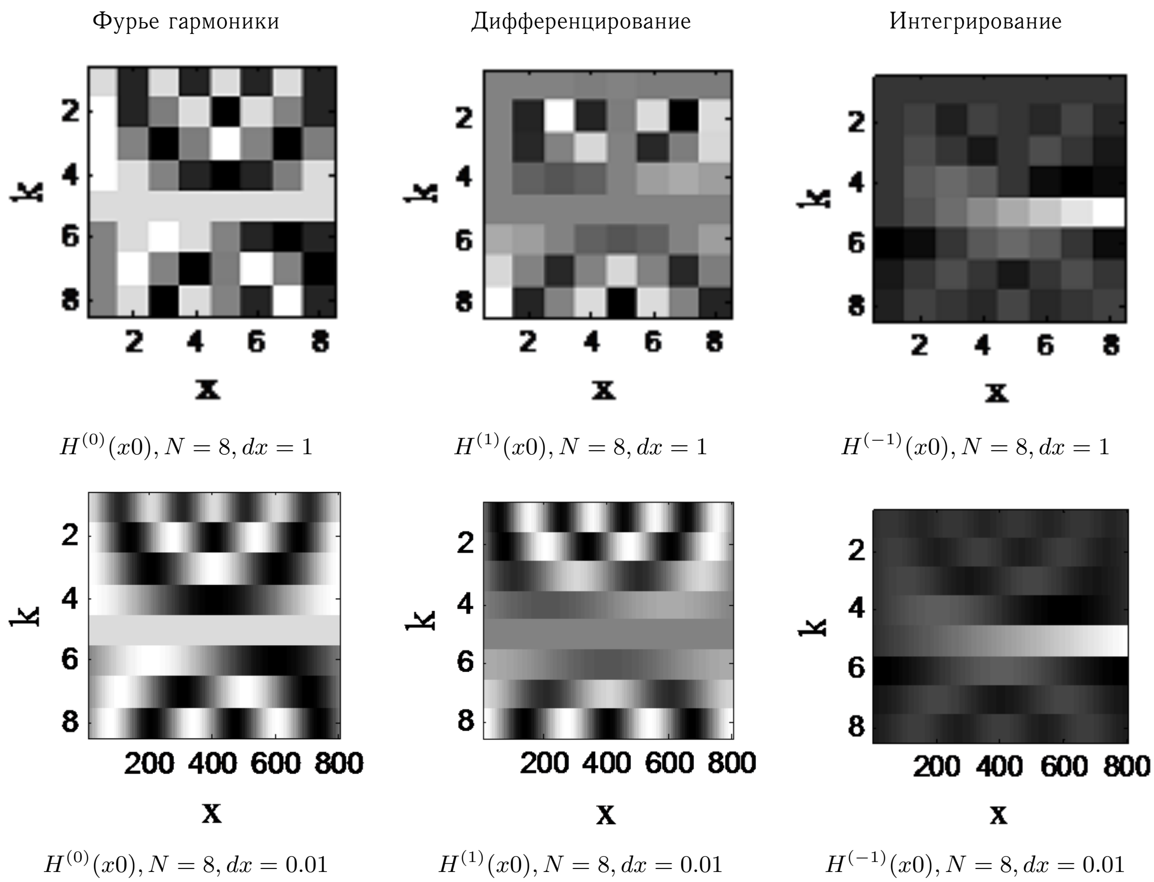


Рис. 1: В нижней строке картинок представлены «непрерывные» Фурье гармоники с их производной и интегралом с шагом оцифровки $dx = 0.01$

функция

$$f^{(n)}(x) = (H^{(0)}(x0) * D')' * H^{(n)}(x) \qquad (4)$$

проходит через точки отсчетов $f^{(n)}(x0)$.

Звездочкой $*$ в (4) обозначаем правило «строка$*$столбец с суммированием» при умножении матриц и штрихом «$'$» — транспонирование.

Для доказательства заметим, что это другая (без суммы) запись (1) и равенство $D = f(x0)$ следует из того, что матрица $H^{(0)}(x0)$ унитарная. В (4) первая звездочка реализует прямое Преобразование Фурье с $H^{(0)}(x0)$, dx=1, а вторая звездочка реализует обратное ПФ с $H^{(n)}(x)$, $dx < 1$.

При нечетном N (1) в Фурье гармониках будет отсутствовать «непарный косинус», который присутствует в первой строке $k = 1(2, 3)$.

КТО ОПЕРАЦИИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ Обратим внимание, на «гладкость результатов» операций теории поля в кубах со стороной 8 с вычислением **КТО** частных производных [2, 3], см. картинки ниже.

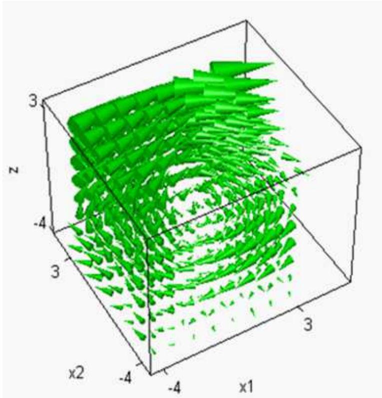
Использование **КТО** операций позволяет при моделировании сложных явлений, процессов обходиться без использования методов разностных схем.

Техника **КТО** совместима с операцией свертка и хорошо связывается аналитическими расчетами и с оцениванием многократных интегралов [2, 3].

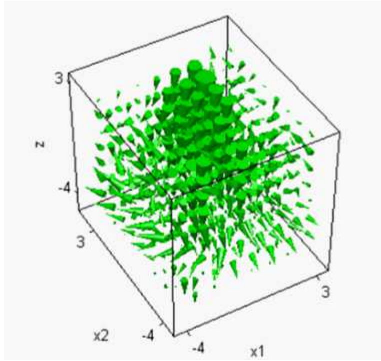
Матлабовские КТО функции с дополнительными построениями для защищенности операций, частными производными занимают много страниц текста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

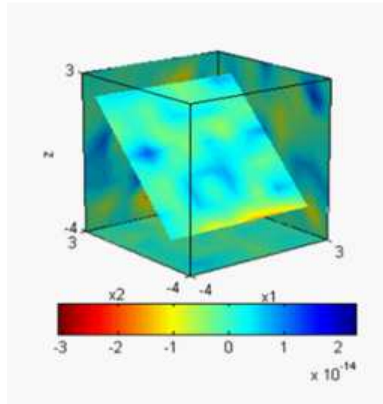
КТО операции развиваются для расширения возможностей математического моделирования Измерительно–Вычислительных Систем. Например, результат операции нечетной АФ О можно представить, как результат КТО интеграла от АФ О и операции, КТО дифференцирования. Есть проблемы с БПФ из-за непарного косинуса и др.



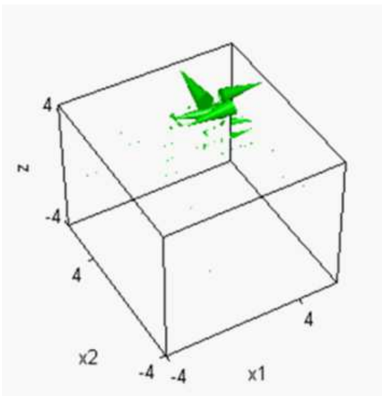
Вихревое поле $\mathbf{A}$



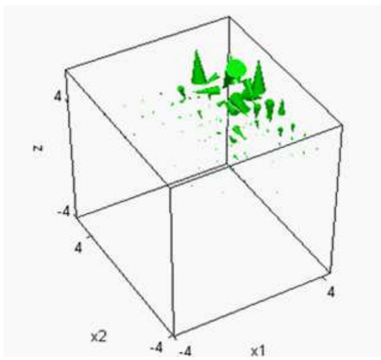
Дискретный $\mathrm{rot}(\mathbf{A})$, $dx = 1$



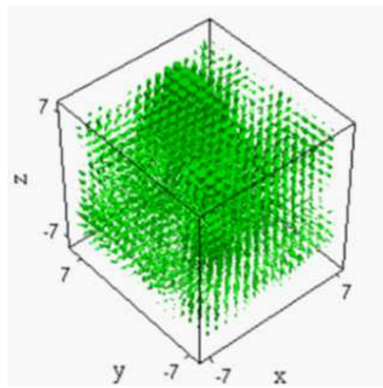
ТОЧНОСТЬ
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{A})) \sim 1.e^{-14}$



Векторное Фурье $= VF(\mathbf{A})$



$\mathrm{rot}(\mathbf{B})$



Непрерывный $\mathrm{rot}(\mathbf{A}), dx = 0.5$

[1] *Кузнецов Н. А., Синицын И. Н.* УФН. **179**. P. 216. (2009).
[2] *Terentiev E. N.* et al. Proc. SPIE. **6215**. P. 86. (2006).
[3] *Shugaev F. V.* et al. Proc. SPIE. **6747**. (2007).

Interpolation, differentiation, integration of data through Finite Sampling Theorems

E. N. Terentiev[1,a], **N. E. Terentiev**[2,b]
[1]*Department of Mathematical modeling and informatics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*
[2]*HiQo Solutions, Moscow, 135 Cedar St Richmond Hill, Georgia 31324*
E-mail: [a]*en.teren@physics.msu.ru,* [b]*nikolay.terentyev@gmail.com*

In the simulation of physical processes and phenomena in radio physics, optics, we propose to use Finite Sampling Theorem (FST) instead theorem of Wiener–Kotelnikov and methods based on the difference schemes. FST operations are compatible with the convolution, analytical calculations, estimation of multiple integrals.

PACS: 02.70.-c, 02.30.
Keywords: Fourier transform, convolution, interpolation, differentiation, integration.

Сведения об авторах

1. Терентьев Евгений Николаевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: en.teren@physics.msu.ru.
2. Терентьев Николай Евгеньевич, lead developer, тел.: 8-103-752928092, e-mail: bnikolay.terentyev@gmail.com.