Теория двухпотоковых оротронов

А. В. Титов*
Саратовский Государственный Университет имени Н. Г. Чернышевского,
факультет нелинейных процессов, кафедра электроники, колебаний и волн.
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Представлена теория оротрона обычной конструкции, в котором используются два взаимодействующих электронных потока. Анализируются случаи поля постоянной амплитуды и гауссово распределение поля в резонаторе.

PACS: 84-40 Fe УДК: 537.86
Ключевые слова: оротрон, двухпотоковая неустойчивость.

В последнее время значительно возрос интерес исследователей к способам генерации и усиления электромагнитного излучения в терагерцовом диапазоне частот. Одним из наиболее перспективных прибором для применения в терагерцовом диапазоне частот на сегодняшний день является оротрон [1]. В данной работе представлена линейная теория оротрона обычной конструкции, в котором используются два взаимодействующих электронных пучка. Подобная модель в приближении больших пространственных зарядов была рассмотрена в работе [2]. В ней была построена линейная теория двухлучевого оротрона на основе метода связанных волн с учетом взаимодействия только двух волн пространственного заряда (по одной в каждом потоке). Результатом явилось увеличение мощности взаимодействия и снижение пусковых токов по сравнению с однолучевым оротроном.

Рассмотрим систему, состоящую из резонатора и двух электронных пучков. Взаимодействие двух электронных потоков с открытым резонатором описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 i_1(x)}{dx^2} + 2jk_{e1}\frac{di_1(x)}{dx} - \left(k_{e1}^2 - k_{p1}^2\right) i_1(x) + k_{p1}^2 i_2(x) = j\frac{k_{e1} I_{01}}{2U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}E(x), \\ &\frac{d^2 i_2(x)}{dx^2} + 2jk_{e2}\frac{di_2(x)}{dx} - \left(k_{e2}^2 - k_{p2}^2\right) i_2(x) + k_{p2}^2 i_1(x) = j\frac{k_{e2} I_{02}}{2U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}E(x), \end{aligned} \qquad (1)$$

здесь $i_{1,2}$ — переменные составляющие токов пучков, $k_{e1,e2} = \dfrac{\omega}{v_{01,02}}$, $k_{p1,p2} = \dfrac{\omega_{p1,p2}}{v_{01,02}}$, ω — частота, $\omega_{p1,p2}$ — плазменные частоты пучков, $I_{01,02}$ — полные токи пучков, $U_{01,02}$ — ускоряющие напряжения пучков, $\bar{S}$ — эффективная площадь, пучков, S_0 — площадь поперечного сечения пучков.

Будет рассмотрено два случая. В первом случае будем предполагать, что поле в резонаторе имеет постоянную амплитуду, то есть его распределение задается так:

$$E(x) = E_0 \exp(-j\beta x) \qquad (2)$$

В этом случае выражение для суммарного тока имеет вид:

$$i(x) = \frac{j}{2}E_0 \exp(-j\beta x) \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}(\gamma_1 + jk_{e2})^2 + \frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}(\gamma_1 + jk_{e1})^2}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)} \right] \times \left[\frac{\exp[(\gamma_1 + j\beta)x] - 1}{(\gamma_1 + j\beta)} \right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}(\gamma_2 + jk_{e2})^2 + \frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}(\gamma_2 + jk_{e1})^2}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_2-\gamma_4)} \right] \times \left[\frac{\exp[(\gamma_2 + j\beta)x] - 1}{(\gamma_2 + j\beta)} \right] +$$

$$+\left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_3+jk_{e2}\right)^2+\frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_3+jk_{e1}\right)^2}{\left(\gamma_3-\gamma_1\right)\left(\gamma_3-\gamma_2\right)\left(\gamma_3-\gamma_4\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_3+j\beta\right)x\right]-1}{\left(\gamma_3+j\beta\right)}\right]+$$

$$+\left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_4+jk_{e2}\right)^2+\frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_4+jk_{e1}\right)^2}{\left(\gamma_4-\gamma_1\right)\left(\gamma_4-\gamma_2\right)\left(\gamma_4-\gamma_1\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_4+j\beta\right)x\right]-1}{\left(\gamma_4+j\beta\right)}\right]\Bigg\}, \quad (3)$$

здесь γ_i — корни дисперсионного уравнения

$$\left[p^2+2k_{e1}p-\left(k_{e1}^2-k_{p1}^2\right)\right]\left[p^2+2k_{e2}p-\left(k_{e2}^2-k_{p2}^2\right)\right]-k_{p1}^2k_{p2}^2=0 \quad (4)$$

Если предположить малое отличие постоянных скоростей электронных потоков относительно их средней скорости, то можно использовать приближенную формулу для вычисления корней

$$\gamma_i=-\frac{2j}{\frac{1}{k_{e1}}+\frac{1}{k_{e2}}}\pm\frac{2j}{\frac{1}{k_{p1}}+\frac{1}{k_{p2}}}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{k_{p1}}-\frac{1}{k_{p2}}}{\frac{1}{k_{e1}}+\frac{1}{k_{e2}}}\right)^2\pm\sqrt{4\left(\frac{\frac{1}{k_{p1}}-\frac{1}{k_{p2}}}{\frac{1}{k_{e1}}+\frac{1}{k_{e2}}}\right)^2+1}}. \quad (5)$$

Мощность взаимодействия выражается общей формулой

$$P=\frac{1}{2}\int_0^L i\left(x\right)E^*\left(x\right)dx, \quad (6)$$

где L — длина пространства взаимодействия, что дает нам:

$$P=\frac{j}{4}E_0^2\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_1+jk_{e2}\right)^2+\frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_1+jk_{e1}\right)^2}{\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\left(\gamma_1-\gamma_3\right)\left(\gamma_1-\gamma_4\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_1+j\beta\right)L\right]-1}{\left(\gamma_1+j\beta\right)^2}-\frac{L}{\left(\gamma_1+j\beta\right)}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_2+jk_{e2}\right)^2+\frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_2+jk_{e1}\right)^2}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)\left(\gamma_2-\gamma_3\right)\left(\gamma_2-\gamma_4\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_2+j\beta\right)L\right]-1}{\left(\gamma_2+j\beta\right)^2}-\frac{L}{\left(\gamma_2+j\beta\right)}\right]+$$

$$+\left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_3+jk_{e2}\right)^2+\frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_3+jk_{e1}\right)^2}{\left(\gamma_3-\gamma_1\right)\left(\gamma_3-\gamma_2\right)\left(\gamma_3-\gamma_4\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_3+j\beta\right)L\right]-1}{\left(\gamma_3+j\beta\right)^2}-\frac{L}{\left(\gamma_3+j\beta\right)}\right]+$$

$$\left.+\left[\frac{\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_4+jk_{e2}\right)^2+\frac{k_{e2}I_{02}}{U_{02}}\frac{\bar{S}}{S_0}\left(\gamma_4+jk_{e1}\right)^2}{\left(\gamma_4-\gamma_1\right)\left(\gamma_4-\gamma_2\right)\left(\gamma_4-\gamma_1\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_4+j\beta\right)L\right]-1}{\left(\gamma_4+j\beta\right)^2}-\frac{L}{\left(\gamma_4+j\beta\right)}\right]\right\} \quad (7)$$

Для корректного сравнения запишем аналогичное выражение для однолучевого оротрона:

$$P_0=\frac{j}{4}E_0^2\left\{\left[\frac{\frac{k_eI_0}{U_0}\frac{\bar{S}}{S_0}}{\left(\gamma_1-\gamma_2\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_1+j\beta\right)L\right]-1}{\left(\gamma_1+j\beta\right)^2}-\frac{L}{\left(\gamma_1+j\beta\right)}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\frac{k_eI_0}{U_0}\frac{\bar{S}}{S_0}}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)}\right]\times\left[\frac{\exp\left[\left(\gamma_2+j\beta\right)L\right]-1}{\left(\gamma_2+j\beta\right)^2}-\frac{L}{\left(\gamma_2+j\beta\right)}\right]\right\} \quad (8)$$

В случае с одним пучком γ_i — корни дисперсионного уравнения

$$p^2 + 2jk_e p - \left(k_e^2 - k_p^2\right) = 0. \tag{9}$$

Так же как и в классической теории оротрона введем безразмерные функции мощности вида. Отметим, что для двухлучевого оротрона подобная функция получена после наложения условия $k_{e1}I_{01}/U_{01} = k_{e2}I_{02}/U_{02}$. Тогда можно представить функции мощности (7) и (8) как

$$P = \frac{j}{4}E_0^2\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}f\left(\phi_{e1}, \phi_{e2}, \phi_{e1}, \phi_{e2}, \Phi_0\right), \tag{10}$$

здесь $\phi_{e1} = k_{e1}L$, $\phi_{e2} = k_{e2}L$, $\phi_{p1} = k_{p1}L$, $\phi_{p2} = k_{p2}L$, $\Phi_0 = \beta L$.

$$P_0 = \frac{j}{4}E_0^2\frac{k_e I_0}{U_0}\frac{\bar{S}}{S_0}f_0\left(\phi_e, \phi_p, \Phi_0\right), \tag{11}$$

здесь $\phi_e = k_e L$, $\phi_p = k_p L$, $\Phi_0 = \beta L$.

Во втором случае амплитуда поля в резонаторе изменяется по закону Гаусса:

$$E\left(x\right) = E_0 e^{-\frac{x^2}{r^2}} e^{-j\beta x}, \tag{12}$$

здесь r определяет характерный размер поля на поверхности решетки. В этом случае мощность взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} P = \frac{\pi}{2}\frac{k_{e1}I_{01}}{U_{01}}\frac{\bar{S}}{S_0}E_0^2 r^2 \Bigg\{ &\frac{\left[j\gamma_1^2 - \gamma_1\left(k_{e2}+k_{e1}\right) - \frac{j}{2}\left(k_{e2}^2+k_{e1}^2\right)\right]\left[1 - Erf\left(\frac{j\beta r}{2} + \frac{\gamma_1 r}{2}\right)\right]}{\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\left(\gamma_1-\gamma_3\right)\left(\gamma_1-\gamma_4\right)} e^{2\left(\frac{j\beta r}{2}+\frac{\gamma_1 r}{2}\right)^2} + \\ &+\frac{\left[j\gamma_2^2 - \gamma_2\left(k_{e2}+k_{e1}\right) - \frac{j}{2}\left(k_{e2}^2+k_{e1}^2\right)\right]\left[1 - Erf\left(\frac{j\beta r}{2} + \frac{\gamma_2 r}{2}\right)\right]}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)\left(\gamma_2-\gamma_3\right)\left(\gamma_2-\gamma_4\right)} e^{2\left(\frac{j\beta r}{2}+\frac{\gamma_2 r}{2}\right)^2} + \\ &+\frac{\left[j\gamma_3^2 - \gamma_3\left(k_{e2}+k_{e1}\right) - \frac{j}{2}\left(k_{e2}^2+k_{e1}^2\right)\right]\left[1 - Erf\left(\frac{j\beta r}{2} + \frac{\gamma_3 r}{2}\right)\right]}{\left(\gamma_3-\gamma_1\right)\left(\gamma_3-\gamma_2\right)\left(\gamma_3-\gamma_4\right)} e^{2\left(\frac{j\beta r}{2}+\frac{\gamma_3 r}{2}\right)^2} + \\ &+\frac{\left[j\gamma_4^2 - \gamma_4\left(k_{e2}+k_{e1}\right) - \frac{j}{2}\left(k_{e2}^2+k_{e1}^2\right)\right]\left[1 - Erf\left(\frac{j\beta r}{2} + \frac{\gamma_4 r}{2}\right)\right]}{\left(\gamma_4-\gamma_2\right)\left(\gamma_4-\gamma_3\right)\left(\gamma_4-\gamma_1\right)} e^{2\left(\frac{j\beta r}{2}+\frac{\gamma_4 r}{2}\right)^2} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{13}$$

здесь $Erf\left(x\right)$ — функция ошибок.

Выражение (12) также получено при условии равенства первеансов пучков. Аналогичное выражение для однолучевого оротрона имеет вид:

$$P = j\frac{k_e I_0 \bar{S} E_0^2 r^2}{2U_0 S_0}\left\{\frac{\frac{\pi}{2}\left(1 - Erf\left[\frac{j\beta r}{2} + \frac{\gamma_1 r}{2}\right]\right)}{\left(\gamma_1-\gamma_2\right)} e^{2\left(\frac{j\beta r}{2}+\frac{\gamma_1 r}{2}\right)^2} + \frac{\frac{\pi}{2}\left(1 - Erf\left[\frac{j\beta r}{2} + \frac{\gamma_2 r}{2}\right]\right)}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)} e^{2\left(\frac{j\beta r}{2}+\frac{\gamma_2 r}{2}\right)^2}\right\} \tag{14}$$

Результатом сравнения является тот факт, что в случае использования двух пучков мощность взаимодействия электронных потоков с резонатором значительно выше, что должно привести к значительному снижению пусковых токов. Это позволяет говорить о перспективности использования двух пучков в данном приборе.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-828.2014.2), РФФИ (проекты № 14-02-00329, № 13-02-01209).

[1] *Русин Ф.С., Богомолов Г.Д.* Электроника больших мощностей. сб. № 5. С. 45. (1968).

[2] *Подин С.В., Трубецков Д.И.* Радиотехника и электроника. вып. 8. , С. 1273. (1995).

The theory of two–stream orotron

A. V. Titov

Saratov State University, Faculty of Nonlinear Processes, Department of Electronics, Oscillations and Waves.
Saratov 410012, Russian Federation
E-mail: titovav88@gmail.com

The theory of orotron of common design, which utilizes two interacting electron beams, is presented here. The cases of a field of constant amplitude and a Gaussian distribution of the field in the resonator are analyzed.

PACS: 84-40 Fe
Keywords: orotoron, two-stream instability.

Сведения об авторе

Титов Алексей Владимирович — ассистент; тел.: (452) 21-07-26, e-mail: titovav88@gmail.com.