О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом

С. О. Гладков*
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ). Россия, 125997, Москва, Волоколамское ш., д. 4
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Аналитически описана траектория движения тела, входящего в вязкую среду под произвольным углом. С учетом сил тяжести, силы сопротивления и выталкивающей силы найдены зависимости кривизны траектории, скорости движения и угла вхождения в виде функций от времени.

PACS: 05.45.-a. УДК: 531.332.1
Ключевые слова: кривизна траектории, сила сопротивления, выталкивающая сила, плоская кривая, уравнения криволинейного движения.

ВВЕДЕНИЕ

Задача, решаемая в настоящей статье, относится к разряду чисто аналитических классических задач, немного напоминающих известную задачу о брахистохроне Я. Бернулли, которая была им сформулирована в 1696 году. Ее решение было дано Л. Эйлером на основе разработанного им математического метода, впоследствии названного вариационным исчислением. В классической монографии [1] дается решение этой задачи, но в идеальном случае, когда силой сопротивления можно пренебречь. При учете сил сопротивления (как вязкого, так и сухого) задача несколько усложняется, однако, ее решение также можно найти, но уже в виде квадратур [2]. При движении тела, входящего под углом α_0 со скоростью v_0 в произвольную вязкую среду, траектория полета становится криволинейной, которая в стационарном случае вырождается в вертикальную асимптоту. Нас будет интересовать, во–первых, закон выхода на эту асимптоту, а, во–вторых, нахождение аналитического решения в нестационарном случае, и вычисление основных параметров динамики движения, таких, как радиус кривизны траектории в произвольный момент времени, скорости движения $v\,(t)$ и угла $\alpha\,(t)$, начальное значение которых совпадает соответственно с v_0 и α_0.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для решения этой задачи мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [2], и составим динамические уравнения движения в мгновенных подвижных осях координат, единичные орты которых будем характеризовать единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ к траектории в произвольной точке, и единичным вектором касательной $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 1).

Аналогично тому, как это проделано в работе [2] запишем следующие уравнения.

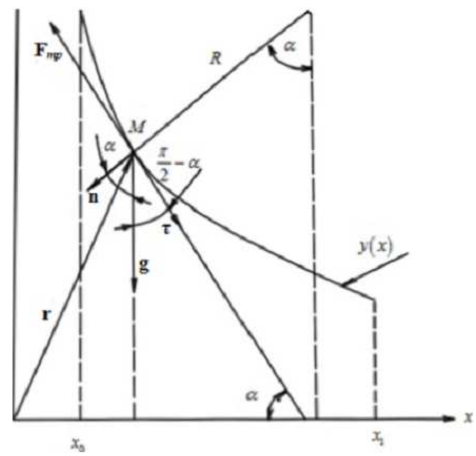

Рис. 1: Схематическое изображение геометрии задачи

На ось n

$$m\dot{v} = -F_{fr} + (mg - F_A)\cos\alpha. \qquad (1)$$

На ось $\boldsymbol{\tau}$

$$\frac{mv^2}{R} = (mg - F_A)\sin\alpha, \qquad (2)$$

где $m-$ масса тела,$g-$ ускорение силы тяжести, $R-$ радиус кривизны траектории, силу сопротивления среды выберем линейно зависящей от скорости движения, то есть, положим, что $F_{fr} = kv$, где $k-$ коэффициент пропорциональности, зависящий от линейных размеров тела и вязкости, выталкивающая сила $F_A = \rho_l gV$, где ρ_l- плотность жидкости, $V-$ объем тела. Как легко показать [2], радиус кривизны траектории R, вводится совершенно элементарно, а именно с помощью соотношения

$$dl = -Rd\alpha.$$

Деля это уравнение на dt, получаем искомое третье уравнение

$$v = -R\dot{\alpha}. \qquad (3)$$

*E-mail: sglad51@mail.ru

Выражая из (3) радиус кривизны R, и подставляя в уравнение (2), с учетом явного вида всех сил, после деления на массу тела, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{k}{m}v + g\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)\cos\alpha, \\ v\dot{\alpha} = -g\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)\sin\alpha, \end{cases} \tag{4}$$

где ρ_b— плотность тела.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений (4) решается довольно просто. С этой целью первое слагаемое в правой части верхнего уравнения перенесем в левую часть и поделим почленно оба уравнения друг на друга. В результате будем иметь

$$\frac{\dot{v} + \frac{k}{m}v}{v} = -\frac{\dot{\alpha}\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отсюда после элементарного интегрирования найдем, что

$$v = \frac{C_1}{\sin\alpha}e^{-\frac{k}{m}t}, \tag{5}$$

где C_1— константа интегрирования. Подставляя теперь решение (5) в нижнее уравнение системы (4), получаем

$$\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha} = -\frac{g}{C_1}\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)e^{\frac{k}{m}t}.$$

Откуда

$$C_1\operatorname{ctg}\alpha = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)e^{\frac{k}{m}t} + C_2, \tag{6}$$

где C_2— еще одна константа интегрирования. В итоге у нас получилась следующая система решений

$$\begin{cases} v = \frac{C_1}{\sin\alpha}e^{-\frac{k}{m}t}, \\ C_1 ctg\alpha = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)e^{\frac{k}{m}t} + C_2. \end{cases} \tag{7}$$

Чтобы найти теперь константы C_1 и C_2, воспользуемся начальными условиями

$$\begin{cases} v(0) = v_0, \\ \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

В результате найдем, что

$$\begin{cases} C_1 = v_0\sin\alpha_0, \\ C_2 = v_0 ctg\alpha_0 - \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} v = v_0\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha}e^{-\frac{kt}{m}}, \\ ctg\alpha = ctg\alpha_0 + \frac{mg}{kv_0\sin\alpha_0}\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)\left(e^{\frac{kt}{m}} - 1\right). \end{cases} \tag{9}$$

Из нижнего уравнения следует, что

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\left[ctg\alpha_0+\beta\left(e^{\frac{kt}{m}}-1\right)\right]^2}}, \\ \cos\alpha &= \frac{ctg\alpha_0+\beta\left(e^{\frac{kt}{m}}-1\right)}{\sqrt{1+\left[ctg\alpha_0+\beta\left(e^{\frac{kt}{m}}-1\right)\right]^2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

где безразмерный параметр

$$\beta = \frac{mg}{kv_0\sin\alpha_0}\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right). \tag{11}$$

Следовательно, из верхнего уравнения системы (9) для скорости движения будем иметь окончательное выражение

$$v = v_0\sin\alpha_0 e^{-\frac{kt}{m}}\sqrt{1 + \left[ctg\alpha_0 + \beta\left(e^{\frac{kt}{m}} - 1\right)\right]^2}. \tag{12}$$

Как видим отсюда, при $t \to \infty$ скорость стремится к величине $v = v_0\beta\sin\alpha_0$, что согласуется со стационарным решением верхнего уравнения системы (4) при учете явного вида параметра β, определенного соотношением (11). Что касается зависимости от времени радиуса кривизны траектории, то в соответствии с уравнением (3) получаем для него

$$R = -\frac{v}{\dot{\alpha}} = -\frac{vcos\alpha}{\frac{d}{dt}(\sin\alpha)}.$$

Подставляя сюда решение (12) и (10), в результате несложных преобразований, находим отсюда искомую зависимость

$$R = \frac{mv_0\sin\alpha_0}{\beta k}e^{-\frac{2kt}{m}}\left(1 + \left[ctg\alpha_0 + \beta\left(e^{\frac{kt}{m}} - 1\right)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{13}$$

Как видно из этого решения при $t \to \infty$, радиус кривизны стремится к бесконечности, как и должно быть. В начальный же момент времени, то есть, при $t = 0$, получается классическое кинематическое выражение

$$R = \frac{mv_0}{\beta k\sin^2\alpha_0} = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha_0\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)}. \tag{14}$$

Как и должно быть. Переходим теперь ко второй части работы, и выясним траекторию движения тела, в рамках поставленной нами задачи, когда вхождение тела в вязкий континуум происходит под некоторым произвольным углом α_0. С этой целью запишем систему уравнений в проекциях на оси x и y. Действительно, имеем тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = v sin\alpha = v_0 \sin\alpha_0 e^{-\frac{kt}{m}}, \\ \dot{y} = v cos\alpha = v_0 \sin\alpha_0 e^{-\frac{kt}{m}} \left[ctg\alpha_0 + \beta \left(e^{\frac{kt}{m}} - 1 \right) \right]. \end{cases} \tag{15}$$

Выбирая точку вхождения тела в жидкость за начало декартовой системы координат, то есть для условий $x(0) = y(0) = 0$, находим, что

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{mv_0}{k} \sin\alpha_0 \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right), \\ y(t) &= v_0 t \beta \sin\alpha_0 + \tfrac{mv_0}{k} (\cos\alpha_0 - \beta\sin\alpha_0) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Как видно, из верхнего уравнения, координата x должна быть ограничена неравенством

$$0 \le x \le \frac{mv_0}{k} \sin\alpha_0. \tag{17}$$

Выражая из верхнего уравнения (16) переменную t и, подставляя в нижнее, получаем искомое уравнение траектории движения

$$y = -\frac{mv_0}{k} \beta \sin\alpha_0 \ln\left(1 - \frac{kx}{mv_0 \sin\alpha_0} \right) + (ctg\alpha_0 - \beta) x. \tag{18}$$

Как видим, при $k \to 0$ траектория переходит в прямую

$$y = x ctg\alpha_0. \tag{19}$$

Что также находится в соответствии классической кинематикой. Общее же уравнение траектории согласно (18) имеет вид почти прямой линии, немного искривленной конкурирующим действием силы тяжести, силы Архимеда и силы вязкого сопротивления. При этом, как следует из неравенства (17), вблизи правой границы кривая выходит на вертикальную асимптоту, как и должно быть.

Покажем, что решения (16) являются экстремалями функционала действия S, которое можно легко составить для решаемой задачи. Чтобы решение было полным, учтем также и диссипативную функцию. Действительно, согласно общим принципам механики [3], имеем

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{mv^2}{2} - U(r) \right) dt, \tag{20}$$

где первое слагаемое – это кинетическая энергия, а $U(r)$ — потенциальная энергия, где r— радиус – вектор тела. В рамках нашей задачи потенциальная энергия будет просто

$$U(r) = -(m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A)\mathbf{r}, \tag{21}$$

где F_A— сила Архимеда. Диссипативная функция, определяемая силой трения, и являющейся величиной существенно положительной, элементарно вводится с помощью общих принципов механики [3] в виде простого выражения

$$\dot{Q} = kv^2. \tag{22}$$

Поэтому с учетом (20) эффективное действие можно записать как

$$S^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{mv^2}{2} - U(r) + \int_{t_0}^{t} \dot{Q} dt' \right) dt. \tag{23}$$

Последнее слагаемое здесь является функцией от времени, а потому может быть отброшено. Обозначим его, как

$$\int_{t_0}^{t} \dot{Q} dt = a(t). \tag{24}$$

Первый интеграл движения согласно (20) можно записать в виде

$$E^* = \frac{mv^2}{2} + U(r) + \int_{t_0}^{t} \dot{Q} dt = const, \tag{25}$$

и с учетом (25) (см., к примеру, работу [4]) уравнение движения элементарно получается из общего принципа

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0. \tag{26}$$

Подставляя в (26) явные выражения (21), (22) и (25), находим после простого дифференцирования $mv\dot{v} - (mg - F_A)v + kv^2 = 0$. Окончательно получим искомое уравнение движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = -k\mathbf{v} + m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A. \tag{27}$$

В рассматриваемой задаче в случае криволинейного движения следует положить, что $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной. Согласно общим принципам дифференциальной геометрии, имеем $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt}$. Но $\frac{dl}{dt} = v$, а $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \frac{\mathbf{n}}{R}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к траектории (см. выше), R — ее мгновенный радиус. В результате $\dot{\mathbf{v}} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$ и уравнение движения (27) можно записать в виде

$$m\left(\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \right) = -k\mathbf{v} + m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A. \tag{28}$$

В проекциях на мгновенные оси $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$, как отсюда видно, мы сразу же приходим к системе уравнений (1), (2). Что и требовалось показать.

3. УРАВНЕНИЯ НА ЕДИНИЧНЫЕ ВЕКТОРА ПОДВИЖНОГО БАЗИСА И ИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Поговорим теперь о некоторых общих свойствах плоского криволинейного движения. Как видно из рис.

1, формулы линейного преобразования от неподвижных орт i, j к подвижному единичному базису n, $\boldsymbol{\tau}$ имеют вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}\cos\alpha - \mathbf{j}\sin\alpha, \\ \mathbf{n} = \mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha. \end{cases} \tag{29}$$

Дифференцируя верхнее уравнение в (29) по параметру l, где dl — элемент длины траектории, получаем $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = -(\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha)\frac{d\alpha}{dl} = -\mathbf{n}\frac{d\alpha}{dl}$. Поскольку же согласно (3) $dl = -Rd\alpha$, то отсюда немедленно следует известная из дифференциальной геометрии формула

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \frac{\mathbf{n}}{R}. \tag{30}$$

Аналогично имеем

$$\frac{dn}{dl} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{R}. \tag{31}$$

Если теперь продифференцировать уравнение (30) по l, и воспользоваться уравнением (31), то приходим к следующем уравнению на единичный вектор касательной

$$\frac{d^2\boldsymbol{\tau}}{dl^2} + \frac{1}{R}\frac{dR}{dl}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{R^2} = 0. \tag{32}$$

Вполне аналогично получается и уравнение на единичный вектор нормали к траектории

$$\frac{d^2\mathbf{n}}{dl^2} + \frac{1}{R}\frac{dR}{dl}\frac{d\mathbf{n}}{dl} + \frac{\mathbf{n}}{R^2} = 0. \tag{33}$$

Эти уравнения удобно переписать в более привычной для всех полярной системе координат r, ϕ, где ϕ — полярный угол, отсчитываемый от оси Ox, а $r = |r|$. В результате имеем следующее очевидное тождество

$$dl = Rd\alpha = \sqrt{r^2 + r'^2}d\phi, \tag{34}$$

где считаем $R > 0$. Тогда уравнения (32) и (33) с учетом (34) можно представить, как

$$\frac{d^2\boldsymbol{\tau}}{d\phi^2} - \frac{r'(r + r'')}{r^2 + r'^2}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\phi} + \frac{1}{R}\frac{dR}{d\phi}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\phi} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{R^2}\left(r^2 + r'^2\right) = 0. \tag{35}$$

$$\frac{d^2\mathbf{n}}{d\phi^2} - \frac{r'(r + r'')}{r^2 + r'^2}\frac{d\mathbf{n}}{d\phi} + \frac{1}{R}\frac{dR}{d\phi}\frac{d\mathbf{n}}{d\phi} + \frac{\mathbf{n}}{R^2}\left(r^2 + r'^2\right) = 0. \tag{36}$$

Чтобы найти решения уравнений (35) и (36) в общем виде, мы поступим следующим образом. Согласно формулам перехода от декартовых координат к полярным, имеем $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$. Тогда в силу равенства $\frac{dx}{dl} = \cos\alpha$, получим отсюда $\cos\alpha = \frac{d(r\cos\phi)}{dl} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2}}\frac{d(r\cos\phi)}{d\phi}$. Поэтому,

$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\left(\sin\phi - \frac{r'}{r}\cos\phi\right), \tag{37}$$

где $r' = \frac{dr}{d\phi}$, а

$$\sin\alpha = \frac{r\cos\phi}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\sqrt{1 + 2\frac{r'}{r}tg\phi - \left(\frac{r'}{r}\right)^2}. \tag{38}$$

Таким образом, уравнения (35) и (36) имеют следующие решения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}\frac{r\sin\phi}{\sqrt{r^2+r'^2}}\left(1 - \frac{r'}{r}ctg\phi\right) - \\ \quad -\mathbf{j}\frac{r\cos\phi}{\sqrt{r^2+r'^2}}\sqrt{1 + 2\frac{r'}{r}tg\phi - \left(\frac{r'}{r}\right)^2}, \\ \mathbf{n} = \mathbf{i}\frac{r\cos\phi}{\sqrt{r^2+r'^2}}\sqrt{1 + 2\frac{r'}{r}tg\phi - \left(\frac{r'}{r}\right)^2} + \\ \quad +\mathbf{j}\frac{r\sin\phi}{\sqrt{r^2+r'^2}}\left(1 - \frac{r'}{r}ctg\phi\right). \end{cases} \tag{39}$$

Чтобы в этом убедиться, следует только вспомнить, что радиус кривизны в полярной системе координат можно представить в виде $R = \frac{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2+r^2-rr''}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Из общих принципов динамики плоского криволинейного движения найдены зависимости всех основных геометрических и физических параметров произвольного тела массы m, входящего в вязкую среду с начальной скоростью v_0 и под произвольным углом α_0;

2. Показано, что решение поставленной задачи можно найти аналитически до конца, а не в виде квадратур, как в задаче о брахистохроне [2], при этом полная энергия тела с учетом диссипативных потерь должна быть минимальной в силу выполнения условия экстремума $\dot{E} + \dot{Q} = 0$.

3. Найдены точные решения уравнений (35), (36).

[1] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969.
[2] *Гладков С. О., Богданова С. Б.* УЗМУ. В. 1. С. 161101. (2016).
[3] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. **1**. М.: Наука. 1973.
[4] *Гладков С. О.* О законе Дарси в условиях сохранения энтальпии. Письма в ЖТФ. **28**. №20. С. 50. (2002).

On trajectory of moving body coming into liquid at arbitrary angle.

S. O. Gladkov

Moscow aviation institute (national research university) (MAI)
Russia, 125997, Moscow, Volokolamskoe shosse, 4
E-mail: sglad51@mail.ru

By analytical the trajectories moving bod, coming into viscous media at arbitrary angle was described. At account of gravitation force, resist force and Arhimed 's force the dependence of curvature trajectory, speed of the move and angle was finding as a function of the time.

PACS: 05.45.-a.
Keywords: curvature of the trajectory, force of the resistance, force of the Arhimed, plane curve, equations of the dynamics.
Received 25.04.2016.

Сведения об авторе

Гладков Сергей Октябринович — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики; тел.: (499) 158–46–47, e-mail: sglad@newmail.ru.