

Ударные волны в газе с неоднородной плотностью

У. Юсупалиев, С. А. Шутеев,* В. Г. Еленский,† С. Т. Белякин
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
 физический факультет, Центр гидрофизических исследований
 Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
 (Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Предложена модель распространения сильных ударных волн (УВ) в газе с неоднородной плотностью. Дифференциальные уравнения с частными производными этой модели сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям, из которых установлена связь между скоростью УВ D_{SW} и плотностью невозмущенной среды ρ_0 . Полученные результаты сравниваются с полученными ранее численными результатами других авторов.

PACS: 47.40.Nm, 52.50.Lp

УДК: 533.6.01

Ключевые слова: сильные ударные волны, цилиндрические и сферические УВ в газе и плазме.

Задача распространения плоской сильной ударной волны (УВ) в газе с неоднородной плотностью $\rho_0(x)$ впервые рассмотрена G. Whitham [1] и им установлено следующее соотношение между скоростью УВ D_{SW} и плотностью газа ρ_0 перед её фронтом:

$$D_{SW} = D_{SW1} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{01}} \right)^{\frac{1}{\beta_0}}, \quad (1)$$

где $\beta_0 = - \left(2 + \sqrt{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0-1}} \right)$, γ_0 и ρ_{01} — показатель адиабаты и начальная плотность газа перед фронтом УВ с начальной скоростью D_{SW1} соответственно.

Распространение УВ в газе с неоднородной плотностью имеет место в звездах [2–6], плотность в которых вблизи поверхности спадает к нулю по степенному закону:

$$\rho_0(x) \sim bx^\delta, \quad (2)$$

где x — координата, отсчитываемая от поверхности внутрь звезды, b и δ — постоянные.

В [6] при рассмотрении различных приближенных методов зависимость скорости экстремально сильной УВ D от геометрической координаты r и плотности среды $\rho(r)$ сведена к следующему виду: $D = C \cdot \rho^{-a} \cdot r^{-b}$, где a и b являются некоторыми функциями параметров γ_{eff} и ν ($\nu = 0, 1$ и 2 соответственно для плоской, цилиндрической и сферической УВ). Показано, что известные приближенные методы дают завышенные значения скорости УВ.

Настоящая работа посвящена установлению соотношения для скорости D_{SW} сильных цилиндрических и сферических УВ в газе/плазме с неоднородной плотностью. Наличие такой зависимости позволяет разработать метод определения пространственного распределения плотности газа/плазмы, важной для практических целей характеристики.

Для нахождения аналитической зависимости $\rho_0(D_{SW})$ рассматривается следующая модель.

Согласно [7, 8], распространение УВ представляет собой адиабатический процесс. В этом случае между давлением p и плотностью газа/плазмы ρ выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad c^2 = \gamma_{eff} \frac{p}{\rho}, \quad (3)$$

где c — скорость звука в газе (в случае плазмы c — скорость изотермического звука), а величины p и ρ связаны уравнением состояния. Для описания процесса распространения сильной УВ в газе/плазме с неоднородной плотностью используем соотношения (3), уравнение непрерывности, уравнение Эйлера.

С целью нахождения связи между скоростью УВ $D_{SW} \equiv \dot{R}_{SW}(t) = dR_{SW}(t)/dt$ и плотностью газа/плазмы перед скачком уплотнения ρ_0 решение ищется в виде:

$$p = \rho_0(t) \left(\dot{R}_{SW}(t) \right)^2 \mu(\xi), \quad \rho = \rho_0(t) g(\xi), \quad (4)$$

$$v = \dot{R}_{SW}(t) u(\xi),$$

где $\mu(\xi)$, $g(\xi)$, $u(\xi)$ — безразмерные функции от автономной переменной $\xi = r/R_{SW}(t)$. Здесь в качестве масштаба плотности ρ_0 была принята плотность невозмущенного газа/плазмы перед фронтом УВ.

В результате преобразований уравнений непрерывности и Эйлера и сопутствующих соотношений получено

$$\rho_0(t) = \rho_{01} \left(\frac{D_{SW}(t)}{D_{SW1}} \right)^{\frac{C_{SW1}}{C_{SW2}}}, \quad (5)$$

представляющее собой искомую связь между скоростью УВ $D_{SW}(t)$ и плотностью газа/плазмы $\rho_0(t)$ перед фронтом этой УВ. Отношение $\beta \equiv C_{SW1}/C_{SW2}$, где C_{SW1} и C_{SW2} — константы разделения, для трех случаев симметрии также находится из дополнительных преобразований уравнений в окрестности скачка

*E-mail: shuteev@phys.msu.ru

†E-mail: nesu@phys.msu.ru

уплотнения сильной УВ:

$$\beta = - \left(2 + \sqrt{\frac{2\gamma_{eff}}{\gamma_{eff} - 1}} + \frac{\nu}{C_{SW2}} \frac{2\gamma_{eff}}{\gamma_{eff} + 1} \right), \quad (6)$$

На рис. 1 приведены результаты численного решения уравнений гидродинамики работы [4], в которой получена зависимость скорости вещества звезды — космических лучей v за фронтом УВ от её плотности ρ_0 перед фронтом УВ (кривая 1), и скорость, полученная по формуле (5) (кривая 2) при тех же начальных условиях (ρ_{01} , v_1 и $\gamma_{eff} = 1.3$). Рисунок показывает хорошее согласование численных результатов и расчетных по формуле (5).

Таким образом, установлена ранее неизвестная зависимость между скоростью УВ сильных цилиндрических и сферических УВ и плотностью газа/плазмы перед их фронтами, хорошо согласующаяся с численными и экспериментальными данными.

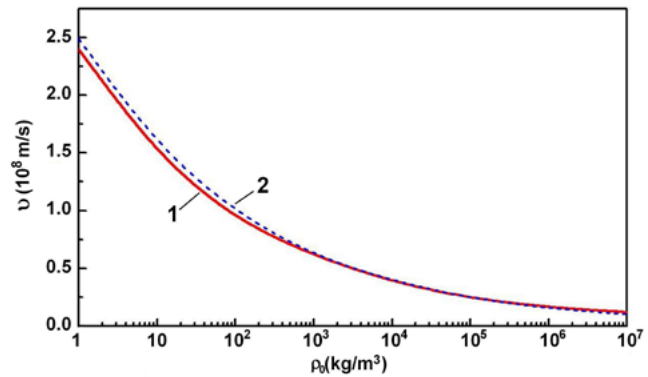


Рис. 1:

- [1] *Whitham G.B.* J. Fluid Mech. **4**. P.337. (1958).
 [2] *Гандельман Г.М., Франк-Каменецкий Д.А.* ДАН СССР. **107**. С. 811 (1956).
 [3] *Sakurai A.* Comm. on Pure and Appl. Math. **13**. P.553 (1960).
 [4] *Colgate S.A., Johnson M.H.* Phys. Rev. Letters. **5**. P.235 (1960).
 [5] *Надеждин Д.К., Франк-Каменецкий Д.А.* Астрономический журнал. **41**. С. 842 (1964).

- [6] *Климишин А.И.* Ударные волны в оболочках звезд. (М.: Наука, 1984).
 [7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. (М.: Наука, 1988).
 [8] *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. (М.: Наука, 1966).

Shock waves in a gas with inhomogeneous density

U. Yusupaliev^a, S. A. Shuteev^b, V. G. Yelenskii^a, S. T. Belyakin

*Center of Hydrophysical Research, Faculty of Physics,
 M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
 E-mail: ^anesu@phys.msu.ru, ^bshuteev@phys.msu.ru ^c,*

The model of propagation of strong shock waves (SW) in a gas with inhomogeneous density is proposed. Partial differential equations of this model are reduced to ordinary differential equations. The relation between the speed of the SW D_{SW} and density of the undisturbed medium ρ_0 is determined. The present results are compared with previous numerical investigations.

PACS: 47.40.Nm, 52.50.Lp

Keywords: strong shock waves, cylindrical and spherical shock waves in gas and plasma.

Received 25.04.2016.

Сведения об авторах

1. Юсупалиев Усен — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник тел.: (495) 939–17–97, e-mail: nesu@phys.msu.ru.
2. Шутеев Сергей Александрович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; тел.: (495) 939–17–97, e-mail: shuteev@phys.msu.ru.
3. Еленский Владимир Григорьевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; тел.: (495) 939–17–97, e-mail: nesu@phys.msu.ru.
4. Белякин Сергей Тимофеевич — инженер; тел.: (495) 939–51–56, e-mail: nesu@phys.msu.ru.