Теоремы отсчетов в операциях математического анализа и теории поля

Е. Н. Терентьев* Н. Е. Терентьев
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

При моделировании физических процессов, явлений предлагается использовать Конечномерные Теоремы Отсчетов (КТО) вместо теоремы Винера–Котельникова [1] и методов, основанных на разностных схемах.

PACS: 02.70.-c, 02.30. УДК: 519.652, 517.2, 517.3, 517.44
Ключевые слова: преобразование Фурье, свертка, интерполяция, дифференцирование, интегрирование.

ВВЕДЕНИЕ

Принципиальное уточнение представления функции дискретным рядом Фурье состоит в том, что:

$$f(x0) = \sum c_k H^{(0)}(k, x0),$$
$$k = 1:N, \quad x0 = 0:N-1, N \ - \text{четно}, \tag{1}$$

$A_k = (f(x0), H^{(0)}(k, x0))$ — Фурье коэффициенты, а $H^{(0)}(k, x0)$ — ортонормированные дискретные Фурье гармоники (2, 3).

$$\begin{gathered}
H_k^{\cos^{(n)}(\pi x)} = \sqrt{\frac{1}{N}}\{\, \pi^n \cos(\pi x + n\frac{\pi}{2})\, \},\\
H_k^{\cos^{(n)}(\rho_m x)} = \sqrt{\frac{2}{N}}\{\, (\rho_m)^n \cos(\rho_m x + n\frac{\pi}{2})\},\\
\rho_m = \frac{2\pi}{N} m, \ \ m = \frac{N}{2} + 1 - k,\\
H_k^{con^{(n)}(x)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 0, \ if\, n > 0 \\ 1, \ if\ n = 0 \\ x^{-n}, \ if\, n \le -1 \end{cases}\\
H_k^{\sin^{(n)}(\rho_m x)} = \sqrt{\frac{2}{N}}\{(\rho_m)^n \sin(\rho_m x + n\frac{\pi}{2})\, \},\\
\rho_m = \frac{2\pi}{N} m, \ \ m = k - (\frac{N}{2} + 1),
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
\begin{matrix} H^{(n)}(x) = \\ H^{(n)}(k, x) = \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} H_k^{\cos^{(n)}(\pi x)}, \ if\ k = 1 \\ H_k^{\cos^{(n)}(\rho_m x)}, \ if\ k = 2 : \frac{N}{2} \\ H_k^{con^{(n)}(x)}, \ if\ k = \frac{N}{2} + 1 \\ H_k^{\sin^{(n)}(\rho_m x)}, \ if\ k = \frac{N}{2} + 2 : N \end{matrix} \right\},\\
k = 1:N,\\
x0 = 0:N-1,\\
x = 0:dx:N-dx
\end{gathered} \tag{3}$$

«Непрерывные функции» $f(x)$ получаются этим же рядом, но только с (малым шагом $dx < 1$ оцифровки) «непрерывными гармониками» $H^{(0)}(k, x)$ (2, 3). Операции математического анализа и теории поля сводятся к операциям над Фурье гармониками$H^{(n)}(x0)$ и $H^{(n)}(x)$: при $n > 0$ реализуем дифференцирование n-го порядка и при $n < 0$– интегрирование n-го порядка. Заметим, что n может быть не целым!

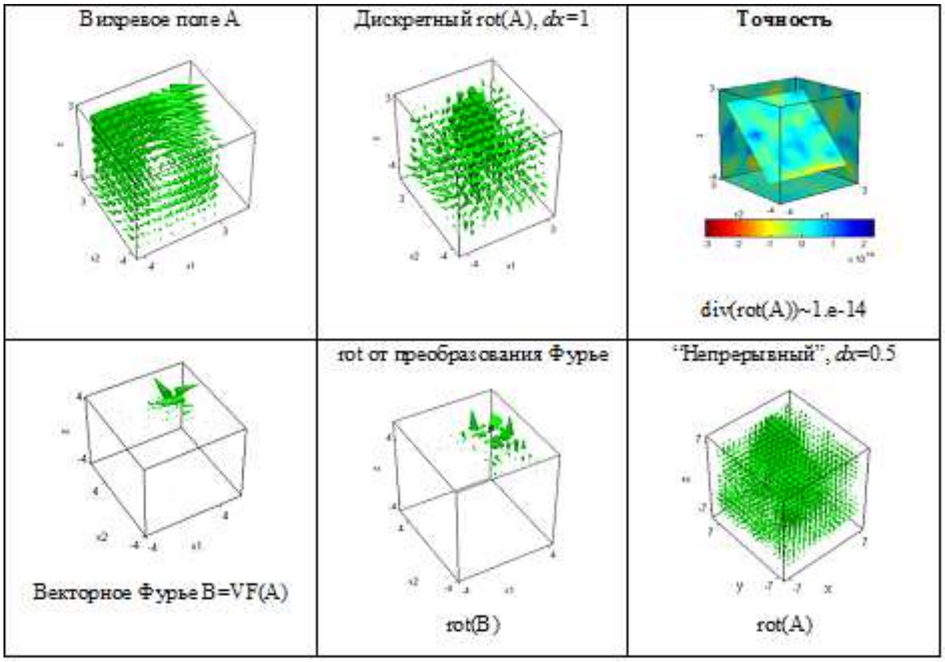

Рис. 1:

КТО

Дан массив (строка) отсчетов $D = f(x0)$, матрицы $H^{(0)}(x0)$ и $H^{(n)}(x)$ (3) тогда непрерывная функция

$$f^{(n)}(x) = (H^{(0)}(x0) * D')' * H^{(n)}(x) \tag{4}$$

проходит через точки отсчетов $f^{(n)}(x0)$.

Звездочкой * в (4) обозначаем правило «строка * столбец с суммированием» при умножении матриц и штрихом' — транспонирование.

Для доказательства заметим, что это другая (без суммы) запись (1) и равенство $D = f(x0)$следует из того, что матрица $H^{(0)}(x0)$ унитарная. В (4) первая звездочка реализует прямое Преобразование Фурье с $H^{(0)}(x0)$, dx = 1, а вторая звездочка реализует обратное ПФ с $H^{(n)}(x)$, dx<1.

При нечетном N (1) в Фурье гармониках будет отсутствовать «непарный косинус», который присутствует в первой строке k = 1 (2, 3).

КТО в теории поля

Обратим внимание, на «гладкость результатов» операций теории поля в кубах со стороной 8 с вычислением КТО частных производных (рис.1) [2, 3].

Использование КТО позволяет при моделировании сложных явлений, процессов обходиться без использования методов разностных схем.

Техника КТО совместима с операцией свертка и хорошо связывается аналитическими расчетами [2, 3] и с оцениванием многократных интегралов.

[1] *Fazlollah M. Reza* An introduction to information theory. (International Student Edition, Tokyo, 1961).

[2] *Terentiev E. N., Shugaev F. V., Shtemenko L. S., Dokukina O. I., Ignateva O. A.* Proc. SPIE. **6215**. P. 86. (2006).

[3] *Shugaev F. V., Terentiev E. N., Shtemenko L. S., Nikolaeva O. A., Pavlova T. A., Dokukina O. I.* Proc. SPIE. **6747**. (2007).

Interpolation, differentiation, integration of data through Finite Sampling Theorems

E.N. Terentiev[1,a] **, N.E. Terentiev**[2,b]

[1]*Department of of Mathematical modeling and informatics, Faculty of Physics,*
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
[2]*HiQo Solutions, Moscow,135 Cedar St Richmond Hill, Georgia 31324*
E-mail: [a]*en.teren@physics.msu.ru,* [b]*nikolay.terentyev@gmail.com,*

In the simulation of physical processes and phenomena in radio physics, optics, we propose to use Finite SamplingTheorem (FST) instead theorem of Wiener–Kotelnikov and methods based on the difference schemes. FST operations are compatible with the convolution, analytical calculations, estimation of multiple integrals.

PACS: 02.70.-c, 02.30.
Keywords: Fourier transform, convolution,interpolation, differentiation, integration.
Received 25.04.2016.

Сведения об авторах

1. Терентьев Евгений Николаевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939–41–78, e-mail: en.teren@physics.msu.ru.
2. Терентьев Николай Евгеньевич — lead developer; тел.: 8-103-752-928-092, e-mail: nikolay.terentyev@gmail.com.