Решения с пограничными и внутренними переходными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция–диффузия–адвекция

Н. Н. Нефедов,* М. А. Давыдова†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

В работе рассмотрена нелинейная краевая задача для уравнения, называемого в приложениях уравнением типа реакции–диффузии–адвекции, решения которой имеют пограничные и внутренние переходные слои (контрастные структуры). Доказано существование таких решений, построена асимптотика и получена оценка ее точности. Исследование основано на дальнейшем развитии асимптотического метода дифференциальных неравенств и позволяет установить устойчивость по Ляпунову контрастных структур

PACS: 02. 30. Jr УДК: 517.953
Ключевые слова: уравнения типа реакция–диффузия–адвекция, контрастные структуры.

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения

$$\varepsilon^{\mathbf{2}}\Delta u - f(\varepsilon\nabla u, u, x) = 0, \quad x = (x_1, ..., x_N) \in D \subset R^N, \tag{1}$$

$$u(x,\varepsilon) = g(x), \ \ x \in \partial D, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функции f, $g(x)$ и граница ∂D — достаточно гладкие, $\Delta = \sum_{k=1}^{N} \partial^2/\partial x_k^2$ — оператор Лапласа. Под обозначением $\varepsilon\nabla u$ подразумевается зависимость функции f от аргументов $\varepsilon\partial u/\partial x_k$, $k = \overline{1,N}$, причем f удовлетворяет условию не более чем квадратичного роста по ∇u. Решения этой эллиптической задачи являются стационарными решениями соответствующей параболической задачи для уравнения, называемого в приложениях уравнением типа реакции-диффузии-адвекции.

Интерес к уравнению (1) обусловлен его многочисленными приложениями, для которых определенное значение имеют два частных случая задачи (1), (2):

$$f = \varepsilon(\mathbf{A}(u,x), \nabla u) + B(u,x), \tag{3}$$

$$f = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{N} A_k(u,x)\,(\partial u/\partial x_k)^2 + B(u,x), \tag{4}$$

где $\mathbf{A}(u,x) - n$ — мерная вектор-функция с достаточно гладкими компонентами. Например, уравнение Бюргерса, возникающее в теории нелинейных волн, при определенных обобщениях может быть сведено к одномерному уравнению типа (1), (3). Краевые задачи для уравнения типа (1), (3) встречаются при описании процесса переноса газовой примеси в приземном слоем атмосферы. При моделировании процесса прохождения теплового фронта в твердотельном образце с нелинейными характеристиками в случае установившегося режима приходим к краевой задаче (1), (2), (4). В качестве еще одного приложения задачи (1), (2) можно отметить математическую модель реакции–диффузии–адвекции, возникающую в задачах разработки новых методов нефтедобычи и описывающую процесс внутрипластового горения, где при рассмотрении стационарного режима приходим к краевой задаче для уравнения типа (1), (3).

Формальная асимптотика решения погранслойного типа строится в рамках основного требования, согласно которому вырожденное уравнение $f(0,u,x) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi(x)$ при условии, что $f_u(0,\varphi(x),x) > 0$, $x \in \bar{D}$. Далее, при определенных ограничениях на функцию $g(x)$ [1] удается доказать существование решения с асимптотикой вида

$$u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + \Pi u(\rho,\eta,\varepsilon), \tag{5}$$

где $\bar{u}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon\bar{u}_1(x) + ...$ — регулярный ряд, описывающий решение вне малой окрестности границы, $\Pi u(\rho,\eta,\varepsilon) = \Pi_0 u(\rho,\eta) + \varepsilon\Pi_1 u(\rho,\eta) + ...$ — пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D, $\rho = \bar{r}/\varepsilon$, $(\bar{r},\eta)-$ локальные координаты, определенные в окрестности ∂D [1]. Члены регулярного разложения определяются как решения конечных уравнений. Члены погранслойного разложения определяются как решения краевых задач, разрешимость которых устанавливается. Справедливы следующие оценки:

$$|\Pi_k u(\rho,\eta)| \le C_k \exp(-\chi_k \rho), \quad \chi_k > 0, \quad C_k > 0, \quad \rho \to \infty.$$

*E-mail: nefedov@phys.msu.ru
†E-mail: m.davydova@bk.ru

Контрастные структуры При исследовании задачи (1), (2) на наличие решений с внутренними переходными слоями основным требованием является условие существования изолированных решений $u = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ вырожденного уравнения $f(0,u,x) = 0$ таких, что $f_u(0,\varphi_i(x),x) > 0$, $i = 1,3$, $f_u(0,\varphi_2(x),x) < 0$ при $x \in \bar{D}$.

Определим множество $\{\bar{\Omega}\}$ достаточно гладких замкнутых поверхностей в области D с локальными координатами $(r,\theta_1,...,\theta_{N-1})$ в малой окрестности каждой поверхности [2]. При описании контрастных структур существенную роль играет присоединенная система

$$\begin{gathered}\partial\tilde{v}/\partial\xi = f(l^1(r,\theta)\tilde{v},..,l^N(r,\theta)\tilde{v},\tilde{u},r,\theta),\\ \partial\tilde{u}/\partial\xi = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty,\end{gathered} \tag{6}$$

где r и θ рассматриваются как параметры (набор параметров $\theta_1,...,\theta_{N-1}$ для краткости обозначим θ), $l^1(r,\theta),...,l^N(r,\theta)$ — известные функции. Для каждой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$ определим функцию

$$H(r,\theta) \equiv \tilde{v}^+(0,r,\theta) - \tilde{v}^-(0,r,\theta), \;\; (r,\theta) \in [-\delta;\delta] \times \bar{\Theta}\ ,$$

где δ — мало, $\bar{\Theta}$ — область изменения координаты θ на поверхности $\bar{\Omega}$, $\tilde{v}^{\pm}(\xi,r,\theta)$ — решения системы (6) с условиями $\tilde{u}^{\mp}(\mp\infty,r,\theta) = \varphi_i(r,\theta)$, $i = 1,3$, $\tilde{v}^{\mp}(\mp\infty,r,\theta) = 0$. Достаточное условие, обеспечивающее существование контрастных структур в задаче (1), (2), формулируется следующим образом: существует поверхность $\Omega_0 \subset \{\bar{\Omega}\}$ такая, что $H(0,\theta) = 0$, $H_r(0,\theta) > 0$, $\theta \in \Theta_0$, где Θ_0 — область изменения координаты θ на поверхности Ω_0.

Асимптотическое разложение решения типа контрастной структуры получается в результате C^1 — сшивания двух асимптотик погранслойного типа

$$\begin{gathered}u^-(x,\varepsilon) = \bar{u}^-(x,\varepsilon) + Qu^-(\xi,\theta,\varepsilon),\\ u^+(x,\varepsilon) = \bar{u}^+(x,\varepsilon) + \Pi u(\rho,\eta,\varepsilon) + Qu^+(\xi,\theta,\varepsilon),\end{gathered} \tag{7}$$

где $\bar{u}^{\pm}(x,\varepsilon)$ — регулярные ряды, $\Pi u(\rho,\varepsilon)$ — пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D (см. п. 1), $Qu^{\pm}(\xi,\theta,\varepsilon) = Q_0u^{\pm}(\xi,\theta) + \varepsilon Q_1u^{\pm}(\xi,\theta) + ...$ — ряды, описывающие пограничные слои в окрестности поверхности перехода Ω, уравнение которой в локальной системе координат, введенной в окрестности поверхности Ω_0 известным способом [2], ищется в виде

$$r = \varepsilon\lambda_1(\theta) + \varepsilon^2\lambda_2(\theta) + ... \tag{8}$$

Построение разложений (7) выполняется в соответствии с результатами п.1. Коэффициенты ряда (8) являются решениями конечных уравнений, которые получаются с использованием условия C^1 — сшивания асимптотик (7) на поверхности перехода Ω.

Требование $H(r,\theta) \equiv 0$ для любой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$ выделяет критический случай. Очевидно, что это условие не позволяет определить поверхность Ω_0, которая теперь определяется посредством другого уравнения, вытекающего из условия C^1 — сшивания асимптотик (7) на поверхности Ω. Построение асимптотических разложений (7) выполняется по аналогии с ранее рассмотренным случаем. Отличие состоит в том, что для определения членов ряда (8) получается последовательность линейных дифференциальных задач, разрешимость которых устанавливается.

Существование решений с асимптотиками (5) и (7) обусловлено свойствами нелинейной функции f и доказывается на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств, напр. [3], так что имеют место оценки $|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}$, где $U_n(x,\varepsilon)$ — частичная сумма n — го порядка ряда (5) или (7), константа C не зависит от ε. Если рассмотреть эти решения как стационарные решения соответствующих параболических задач, то их устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (напр. [3]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16–01–00437.

[1] *Davydova M. A.* Math. Notes. **98**, № 6, P. 45. (2015).

[2] *Нефедов Н. Н., Давыдова М. А.* Дифф. уравн. **49**, № 6. С. 715. (2013).

[3] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Труды Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова. **268**. С. 268. (2010).

Solutions with boundary and internal transition layers in multidimensional singular perturbed reaction-diffusion-advection problems

N. N. Nefedov[a], **M.,A. Davydova**[b]

Department of Mathematics, Faculty of Physics,
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]nefedov@phys.msu.ru, [b]m.davydova@bk.ru

We consider a nonlinear boundary value problem for an equation of reaction- diffusion-advection type whose solutions have boundary and internal transition layers (contrast structures). We prove the existence of such solutions, construct their asymptotics, and estimate its accuracy. The analysis is carried out with the use of the asymptotic method of differential inequalities and permits one to prove the Lyapunov stability of the contrast structures.

PACS: 02. 30. Jr
Keywords: equations of reaction–diffusion–advection type, contrast structures.
Received 25.04.2016.

Сведения об авторах

1. Нефедов Николай Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математики физического факультета МГУ; e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
2. Давыдова Марина Александровна, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: m.davydova@bk.ru.