

Компьютерное представление и обработка знаний на примере теорем об аналогиях математических моделей

С. Н. Васильев,* Н. Ю. Морозов†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра физико-математических методов управления
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Доклад посвящён логическим средствам представления и обработки знаний на ЭВМ. Рассмотрены задачи автоматического синтеза текстов и доказательство теорем о модельных аналогиях.

PACS: 02.10.Ab, 02.50.Tt

УДК: 517.933, 517.938, 517.11

Ключевые слова: автоматическое доказательство теорем, первопорядковые логики, математическая теория систем.

Развитие средств автоматического получения и верификации теорем на ЭВМ имеет длинную историю. На ЭВМ решены некоторые сложные комбинаторные и другие проблемы математики. В докладе предлагаются логические средства представления и обработки знаний, эффективность которых демонстрируется на примере двух характерных типов задач — синтеза и доказательства теорем. Рассматриваются теоремы типа теорем о сохранении свойств математических моделей без ограничения разнообразия этих моделей и их свойств.

Представление знаний (определений свойств математических моделей, условий теорем об этих свойствах и т.п.) реализуется в виде текстов древовидной структуры. Вершины их ветвления являются двухместными логическими связками $\&$, \vee , висячие вершины — некоторыми заключительными утверждениями $R_p = \overline{1}, m$, а остальные вершины — типовыми кванторами (ТК) w_α , $w_\alpha \in \{\hat{w}_\alpha, \check{w}_\alpha\}$, т.е. ТК всеобщности (ТКВ) $\hat{w}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \forall z_\alpha (W \rightarrow _)$ или существования $\check{w}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exists z_\alpha (W_\alpha \& _)$ (ТКС). Здесь z_α — кванторные переменные, $\alpha = 1, 2, \dots$, W_α — типовые условия, определяющие их область значения.

Выражения R_p , W_α могут быть неформальными фрагментами (допускающими любые вольности записи обычных математических текстов), но предполагается, что известно, какие кванторные переменные z_α в них входят свободно (т.е. не связанными какими-то другими кванторами, быть может, имеющимися внутри R_p или W_α). Такие тексты назовем неформальными позитивно-образованными формулами (НПОФ) [1].

В отличие от формул обычных логических языков, благодаря позитивной структуре формул этого языка к ним применимы дополнительные логические правила обработки, например, правило подстановочности импликации для главных подформул (ГП), т.е. тех подформул, которые возникают по схеме построения фор-

мул языка НПОФ из заключительных: замена ГП на логически более сильную (слабую) усиливает (соотв. ослабляет) исходную формулу.

Рассматриваются два типа задач автоматизации обработки знаний:

1. алгоритмизация формирования на ЭВМ (в языке НПОФ) условий D теорем об аналогиях $D \rightarrow (P \rightarrow P')$ (задача автоматизации синтеза текста теоремы) и
2. обоснование этих теорем (задача автоматического доказательства синтезированной теоремы).

Здесь P и P' — аналогичные друг другу свойства двух математических моделей \mathcal{U} и \mathcal{U}' , а условия D обеспечивают перенос свойства из \mathcal{U} в \mathcal{U}' . Сказанное означает, что рассматриваемые модели могут быть любыми, но свойство P должно допускать свою переформулировку в терминах второй модели, чтобы говорить о его сохранении. Так, в алгебре это означает, что оба свойства представимы в пересечении сигнатур рассматриваемой пары моделей.

В докладе описываются разработанные средства автоматизации, в т.ч., соответствующее программное обеспечение (ПО).

Постановка задач автоматического синтеза и доказательства теорем на ЭВМ относится к наиболее строгим (математизированным) направлениям искусственного интеллекта. При этом решение задачи автоматического синтеза теорем в той или иной предметной области по своей сути обычно требует критериев содержательности (ценности) синтезируемых теорем. Так, в задачах синтеза теорем в области проектирования логических устройств (комбинационных схем), а именно теорем, получаемых на основе решения логических булевых уравнений, такими критериями были критерии минимальной сложности реализации их решений в том или ином классе формул. В рассматриваемом в данном докладе случае содержательность решений обеспечивается указанной структурой уравнения и оговоренной интерпретацией его известных членов.

Основным результатом, излагаемым в данном докладе, в части первой задачи — синтеза теорем — явля-

*E-mail: vassilyev_sn@mail.ru

†E-mail: morozov.nikolay@physics.msu.ru

ется обеспечение алгоритмичности получения и обоснования достаточности условий D . В частности, в развитии [2], достигнуто алгоритмическое упрощение получаемого поначалу и сложного для проверки решения D . Оно осуществляется расщеплением этого D и его заменой на конъюнктивный набор более простых условий, достаточных в совокупности для исходного D , без эвристического выбора подмножества кванторных переменных, по которым это расщепление целесообразно.

Ранее этот выбор предполагал подсказку пользователя ПО. Показано, что расщепление реализуемо по всем ТКС, для чего в их условия W_α должны быть вставлены дополнительные условия S_α с т.н. скулемовскими функциями (T.Skolem), т.е. каждое W_α заменяется на $(W_\alpha \& S_\alpha)$. Заметим, что в соответствии с [2], в полученном поначалу условии D каждый ТКС \dot{w}_α содержит внутри W_α предикат межмодельных связей переменных z_α и $z_{\alpha'}$ той и другой модели, соответственно.

Для объединения наиболее сильных сторон человека и ЭВМ в разработанном ПО оставлена возможность вмешательства пользователя в работу ПО: если пользователь для дополнительного упрощения условий синтезированной теоремы хочет исключить из части ее условий некоторые нежелательные переменные, то такая возможность предусмотрена. Но при этом в дополнение к условиям теоремы автоматически формируются условия корректности вмешательства пользователя, включаемые в окончательный текст синтезированной теоремы.

Впервые задача синтеза теорем рассматривается в комбинации с задачей автоматического доказательства синтезированной теоремы. Хотя алгоритмы синтеза условий D являются корректными и потому получаемые с их помощью теоремы, вообще говоря, не требуют доказательства, тем не менее потребность в нем у пользователя может возникать при желании ознакомиться с доказательством, в т.ч. с использованием синтезированных условий корректности упоминавшегося выше его вмешательства в работу ПО.

При этом используется язык формальных ПОФ (ФПОФ): в каждой ветви их структуры ТКВ и ТКС должны чередоваться, конъюнктивные (дизъюнктивные) ветвления возможны лишь после ТКС (соответственно ТКВ), а каждое из выражений R_p и W_α — предикат или конъюнкция предикатов, аргументами которых выступают кванторные переменные z_α . Язык ФПОФ полон относительно выразительной силы языка 1-го порядка. В [1] предложено исчисление \mathcal{I} с обоснованием его корректности и полноты относительно выводимости (в исчислении предикатов 1-го порядка).

Исчисление \mathcal{I} имеет ряд преимуществ в сравнении с методами, наиболее популярными в системах искусственного интеллекта, в т.ч. основанными на известном методе резолюций. Благодаря специальной структуре ФПОФ, обеспечивается крупноблочность и меньшее разнообразие формул, но, тем не ме-

нее, язык ФПОФ полон. Исчисление \mathcal{I} имеет единственное, унарное, крупноблочное правило вывода w . Это и специальная структура самих ФПОФ снижают комбинаторность поиска выводов в сравнении, например, с методом резолюций; причем техника вывода (опровержения) анализирует только ближайшую окрестность корня ФПОФ, что позволяет сфокусировать внимание без потери полноты вывода. Кроме того, в позитивно-образованном формализме исходная эвристическая структура знания сохраняется лучше, чем, например, в языке дизъюнктов метода резолюций. Это повышает совместимость логики с эвристиками, что важно для настройки тактик вывода на тот или иной класс прикладных задач с целью повышения эффективности поиска выводов; кроме того, сохранение эвристической структуры выводов улучшает его наглядность для человека.

ПО реализовано в языке JavaScript. Интерфейс программы представляет собой web-страницу, содержание которой меняется по ходу работы с ней. Удобство работы с формулами обеспечено открытой библиотекой MathJax, позволяющей преобразовывать команды известного языка разметки TeX в математические формулы, в т.ч. динамически. В разработанном ПО формулы и все виды их компонент представляются символьными строками, которые обрабатываются программными функциями посимвольно. Единообразие представления структур данных упрощает ПО в сравнении с объектно-ориентированной реализацией, в т.ч. при работе с математическим «жаргоном» НПОФ. Представление и обработка ПОФ в ЭВМ в древовидной форме удобны для визуального восприятия по сравнению с использованием скобок в математических формулах.

К виду ФПОФ логически эквивалентным образом преобразуются и сами теоремы об аналогиях, после чего они передаются на вход подпрограммы автоматического доказательства. При этом у пользователя есть возможность упростить условия путём замены связей S_α по переменным на эквивалентные. Такая замена не влияет на доказуемость синтезируемой теоремы

Особенность применения исчисления \mathcal{I} для доказательства теорем об аналогиях заключается, во-первых, в отсутствии необходимости разыменования переменных [1] как до, так и после применения правила ω , а во-вторых, — в однократном использовании правила ω в применении к очередному ТКВ, т.е. без сохранения полной копии использованной ветви формулы, что существенно снижает комбинаторную сложность доказательства.

Получены теоремы об аналогиях для разных свойств систем, описываемых дифференциальными уравнениями, в т.ч. с управлениями. Например — теорема для сложного свойства диссипативности движений из некоторой начальной области.

Другими примерами применения языков ПОФ являются задачи автоматизации планирования действий,

для чего используется конструктивный фрагмент исчисления \mathcal{I} [1], задачи абдуктивного вывода с приложениями в диагностике и др.

Исследования в данном направлении поддержаны грантом РФФИ (проекты №13–08–00948, №16–29–04–415) и Российской академией наук (проект 1.20 П).

[1] Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунцов Б.Е. Интеллектуальное управление динамическими системами (М.: Физматлит, 2000).

[2] Васильев С.Н., Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю. ДАН. **465**, № 1. С. 14. (2015).

Computer representation and processing of knowledge on the example of theorems of mathematical models analogies

S. N. Vassilyev^a, N. Yu. Morozov^b

*Department of Physical–Mathematical Control Methods, Faculty of Physics,
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: ^avassilyev_sn@mail.ru, ^bmorozov.nikolay@physics.msu.ru*

The paper is dedicated to logical means of knowledge representation and processing on computers. We consider the problems of automated theorems synthesis and proving for the class of theorems on mathematical models analogies.

PACS: 02.10.Ab, 02.50.Tt

Keywords: Automated theory proving, 1st order logics, mathematical systems theory.

Received 25.04.2016.

Сведения об авторах

1. Васильев Станислав Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, академик РАН, зав. кафедрой физико-математических методов управления; тел.: (495) 334–89–10, e-mail: vassilyev_sn@mail.ru.
2. Морозов Николай Юрьевич — аспирант Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: morozov.nikolay@physics.msu.ru.