УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА **3**, 163103 (2016)

# Инварианты дифференциальных уравнений и качественный анализ их решений

С. Н. Васильев,[*] А. Г. Кушнер[†]
*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,*
*физический факультет, кафедра физико–математических методов управления*
*Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Для класса систем двух эволюционных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы нелинейной диффузии, тепло- и массопереноса, построены допустимые замены переменных, не выводящие за пределы этого класса.

PACS: 02.20.-a УДК: 517.957
Ключевые слова: джеты, эволюционные системы, псевдогруппы Ли, дифференциальные инварианты, качественные свойства.

Проблема классификации дифференциальных уравнений является одной из основных в теории дифференциальных уравнений. Выбор преобразований, относительно которых проводится классификация, диктуется выбором класса дифференциальных уравнений: преобразования должны сохранять этот класс.

В общем случае поиск таких преобразований достаточно сложен, но если искать инфинитезимальные преобразования, то задача упрощается. Допустимые преобразования образуют псевдогруппу Ли, и задача классификации дифференциальных уравнений превращается в проблему описания орбит ее действия. Это описание дается в терминах дифференциальных инвариантов (например [1]). На примере класса нелинейных эволюционных систем вида

$$u_t = u_{xx} + u\,f(t,x,u^2+v^2) - v\,g(t,x,u^2+v^2),$$
$$v_t = v_{xx} + v\,f(t,x,u^2+v^2) + u\,g(t,x,u^2+v^2)$$

с произвольными функциями $f$ и $g$ класса $C^\infty$ укажем способ построения псевдогруппы Ли преобразований, сохраняющих этот класс. Такие системы описывают процессы нелинейной диффузии, а также и тепло- и массопереноса реагирующих систем.

Заметим, что эта система инвариантна относительно поворотов вокруг плоскости $t$, $x$. Аналогичные системы, но допускающие гиперболические повороты, были исследованы в [2]. В полярных координатах $r$, $\theta$ $(u = r\cos\theta,\;\; v = r\sin\theta)$ система имеет вид

$$\begin{cases} r_t = r_{xx} - r\theta_x^2 + r\,f(t,x,r^2), \\ \theta_t = \theta_{xx} + \frac{2}{r} r_x\theta_x + g(t,x,r^2). \end{cases}$$

В пространстве $J^2(2,2)$ 2-джетов гладких функций из $R^2(t,x)$ в $R^2(u,v)$ введем 1-параметрические семейства функций

$$F_1^\tau = r_{1,0} - r_{0,2} + r\theta_{0,1}^2 - r\,f_\tau(t,x,r^2)$$

и

$$F_2^\tau = \theta_{1,0} - \theta_{0,2} - \frac{2}{r} r_{0,1}\theta_{0,1} - g_\tau(t,x,r^2),$$

которые при нулевом значении параметра $\tau$ определяют рассматриваемую систему, т. е. $f_0(t,x,r^2) = f(t,x,r^2)$ и $g_0(t,x,r^2) = g(t,x,r^2)$. Здесь $t$, $x$, $r$, $\theta$, $r_{1,0}$, $\theta_{1,0}$, $\ldots$ — канонические координаты пространства $J^2(2,2)$ [3].

Пусть $\Phi_\tau$ — преобразование сдвига вдоль векторного поля $X$ на пространстве 0-джетов $J^0(2,2)$. Условие сохранения класса систем при таком преобразовании имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\Phi_\tau^{(2)}\right)^*(F_1) = a_{11}^\tau F_1^\tau + a_{12}^\tau F_2^\tau, \\ \left(\Phi_\tau^{(2)}\right)^*(F_2) = a_{21}^\tau F_1^\tau + a_{22}^\tau F_2^\tau, \end{cases}$$

где $\Phi_\tau^{(2)}$ — продолжение преобразования $\Phi_\tau$ в пространство 2-джетов, $a_{ij}$ — функции на пространстве 2-джетов, образующие единичную матрицу при $\tau = 0$. Дифференцируя последнюю систему по $\tau$ при $\tau = 0$, получим для отыскания векторного поля $X$ соотношения:

$$\begin{cases} X^{(2)}(F_1)\big|_E = rH(t,x,r^2), \\ X^{(2)}(F_2)\big|_E = G(t,x,r^2), \end{cases}$$

где $X^{(2)}$ — продолжение векторного поля $X$ в пространство 2-джетов, а $H$, $G$ — произвольные функции. Вертикальная черта означает ограничение функции $X^{(2)}(F_i)$ на подмногообразие $E = \left\{F_1^0 = 0,\;\; F_2^0 = 0\right\} \subset J^2(2,2)$. Эта система представляет собой систему из 25 уравнений в частных производных относительно четырех коэффициентов векторного поля $X$. Решая ее, получим искомое $X$ как линейную комбинацию с постоянными коэффициентами векторных полей

[*] E-mail: vassilyev_sn@mail.ru
[†] E-mail: kushner@physics.msu.ru

$$X_\alpha = \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha'(t)\,x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{8}\,\alpha''(t)\,x^2 r\frac{\partial}{\partial r},$$
$$X_\beta = \beta(t)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\beta'(t)\,x\,r\frac{\partial}{\partial r},$$
$$X_\gamma = \gamma(t)\,r\frac{\partial}{\partial r},$$
$$X_\delta = \delta(t)\frac{\partial}{\partial s},$$

образующих бесконечномерную алгебру Ли ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные функции времени $t$).

Так как изучаемая система эволюционная, то имеет смысл рассматривать преобразования, не затрагивающие время. Для этого нужно положить $\alpha(t) = 0$. Преобразования сдвигов вдоль оставшихся векторных полей имеют вид:

$$\Phi_\tau^\beta : (t, x, r, \theta) \to \left(t,\ x + \beta(t)\,\tau,\ r\exp\left(-\frac{1}{2}\beta'(t)\left(\frac{\beta(t)\,\tau^2}{2} + \tau x\right)\right),\ \theta\right),$$

$$\Phi_\tau^\gamma : (t, x, r, \theta) \to (t, x,\ r\exp\ (\gamma(t)\tau)\,,\ \theta)\,,$$

$$\Phi_\tau^\delta : (t, x, r, \theta) \to (t, x, r, \theta + \delta(t)\tau)\,.$$

Эти преобразования и являются допустимыми для рассматриваемого класса эволюционных систем. Для нахождения дифференциальных инвариантов нужно найти действие этих преобразований на функции $f$ и $g$. В результате получается псевдогруппа Ли преобразований, действующая на эти функции. Ее инварианты различают регулярные орбиты и, тем самым, дают классы эквивалентных уравнений.

Однако на практике часто возникают вопросы качественного характера. Важно не только классифицировать уравнения, но и выяснять какие качественные свойства их решений сохраняются, для чего функции $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ нужно выбирать удовлетворяющими условиям сохранения желаемых свойств. При этом полезна теория модельных аналогий [4].

Получаемые на основе алгоритмов из [4] условия сохранения при допустимых преобразованиях могут, например, существенно отличаться от условий принципа сравнения В.М. Матросова [5] в терминах вектор-функции Ляпунова (действующей в направлении, обратном направлению сохранения свойства).

Конкретный вид получаемых условий зависит не только от исследуемых свойств, но и от совпадения/различия направления действия преобразования и требуемого направления сохранения свойства. Так, по алгоритмам из [4] в задачах устойчивости, притяжения или эпсилон-достижимости равновесия для сохранения свойства в направлении построенного допустимого преобразования в качестве одного из наборов условий сохранения получается набор требований, содержащий условие, которое в случае обратимости преобразования имеет смысл непрерывности в нуле отображения, обратному построенному. Это условие замещает собой условие типа определенной положительности вектор-функции Ляпунова, обычно привлекаемое в задачах устойчивости.

Исследования в данном направлении поддержаны грантом Российского научного фонда (проект 15–19–00275) и Российской академией наук (проект 1.20 П).

[1] *Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Автом. и телемех. № 3. С. 83. (2013).
[2] *Косов А.А., Семенов Э.И.* ДАН. **460**, № 2. С. 147. (2015).
[3] *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. (М.: Наука, 1986).
[4] *Васильев С.Н.,Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю.* ДАН. **465**, № 1. С. 14. (2015).
[5] *Васильев С.Н., Матросов В.М., Суменков Е.А.* УМН. **40**, № 4. С. 139. (1985).

# Invariants of differential equations and qualitative analysis of their solutions

**S. N. Vassilyev**[a], **A. G. Kushner**[b]
*Department of Physical–Mathematical Control Methods, Faculty of Physics,*
*M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*
*E-mail:* [a]*vassilyev_sn@mail.ru,* [b]*kushner@physics.msu.ru*

For the class of evolutionary systems of two nonlinear differential equations describing the nonlinear diffusion processes, heat and mass transfer, admissible transformations are constructed.

PACS: 02.20.-a
Keywords: jets, evolutionary systems, Lie pseudogroups, differential invariants, qualitative properties.
Received 25.04.2016.

**Сведения об авторах**

1. Васильев Станислав Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, академик РАН, зав. кафедрой физико-математических методов управления Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; тел. (495) 334–89–10, e-mail: vassilyev_sn@mail.ru.
2. Кушнер Алексей Гурьевич — докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры физико-математических методов управления Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; тел. (495) 334–89–61, e-mail: kushner@physics.msu.ru.