

Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне

С. О. Гладков,* С. Б. Богданова†

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ)
 Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
 (Статья поступила 11.03.2016; Подписана в печать 25.02.2016)

Найдено аналитическое решение задачи Я. Бернулли о брахистохроне с учетом сил трения (вязкого, пропорционального скорости движения и сухого). Показано, что ее решение можно представить только в виде квадратур, и с помощью численного расчета приведены различные рисунки оптимальных траекторий в условиях диссипации. Доказано, что в отсутствие сил трения любое движение по криволинейному желобу под действием одной только силы тяжести всегда сводится к задаче о брахистохроне, решение которой может быть найдено без привлечения методов вариационного исчисления и оптимального управления, а, используя лишь общие принципы динамики криволинейного движения. Найдена точка «геометрического фазового перехода» $u_0 = \ln\left(\frac{1}{k_2 b}\right)$, соответствующая срыву брахистохрон с одного класса траекторий на качественно другой класс. Приведено численное описание поведения траекторий в непосредственной окрестности от точек «геометрического фазового перехода». Аналитически и численно доказано, что при выходе системы на стационарный режим траектория будет представлять собой обычную параболу, движение по которой происходит периодическим образом, напоподобие маятника.

PACS: 05.45.-a

УДК: 531.332.1

Ключевые слова: брахистохрон, сухое трение, вязкое трение, мгновенная система координат, «геометрический фазовый переход», численное моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Задача, о которой мы сейчас будем говорить, может быть отнесена к задачам из области истории. Несмотря, однако, на ее весьма почтенный возраст (впервые она была сформулирована Я. Бернулли в 1696 г., а ее решение значительно позже было найдено Л. Эйлером, с помощью разработанного им метода вариационного исчисления) в настоящий момент отсутствует ее решение в том случае, если ставится вопрос о выяснении траектории при учете трения о желоб, по которому скатывается шарик. Чтобы все было понятно, о какой задаче идет речь, напомним ее основную формулировку. Представим себе шарик, скатывающийся по желобу произвольной формы $y = y(x, C)$, описывающей некоторое семейство кривых, где C — константа интегрирования (рис. 1), причем таких, чтобы время скатывания $\Delta t\{y\}$ было минимальным. Первое наше утверждение заключается в том, что эту задачу можно решить без привлечения методов вариационного исчисления [1,2] с помощью лишь одних уравнений динамики криволинейного движения. А второе утверждение заключается в том, что ее можно решить не только для идеального случая, но и при учете диссипативных потерь, то есть с учетом трения шарика о желоб. Эта задача не слишком сложна в плане понимания, однако, на наш взгляд, она будет весьма полезна с аналитической точки зрения, поскольку относится к классической задаче механики, которая ранее не решалась. Рас-

смотрим здесь только двухмерный случай, но прежде, чем переходить к аналитическому описанию, вернемся к рис. 1, и сделаем к нему некоторые комментарии. $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в произвольную точку M на желобе, \mathbf{i}, \mathbf{j} — единичные орты в направлении осей x, y соответственно, $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ — мгновенный ортогональный базис в текущей точке M , \mathbf{g} — ускорение силы тяжести. Считаем, что $y \geq 0$ $x \in (-\infty, +\infty)$, R — радиус кривизны траектории в точке M . Условно x_0, x_1 — начало и конец траектории.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ АНАЛИЗ
В ОТСУТСТВИИ ТРЕНИЯ

Рассмотрим вначале задачу без трения, и ответим на вопрос о зависимости $y = y(x, C)$ в этом случае. Для этого запишем систему динамических уравнений движения в подвижном базисе $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$. Согласно геометрии рис. 1, проектируя ускорение силы тяжести на подвижные оси \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$, с учетом явного вида касательного ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ и нормального $a_n = \frac{v^2}{R}$, будем иметь

$$\begin{cases} g \sin \alpha = \dot{v}, \\ g \cos \alpha = -\frac{v^2}{R}, \end{cases} \quad (1)$$

где радиус кривизны [3] $R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. Поскольку $y' = \operatorname{tg} \alpha$, то отсюда немедленно следует, что $R = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{dl}{d\alpha}$ или, с учетом равенства $\frac{dx}{dl} = \cos \alpha$,

*E-mail: sglad@newmail.ru

†E-mail: sonjaf@list.ru

получим, что $Rd\alpha = dl$. Заметим здесь, что если придерживаться обычного определения угла наклона касательной, то он должен отсчитываться не как на рис. 1, а с противоположной стороны от касательной, т.е. это угол $\pi - \alpha$. В этом случае будет $y' < 0$ и $R < 0$. Поэтому уравнения (1) автоматически перейдут, как легко понять и проверить, во все нижеследующие. Итак,

$$\dot{x} = v_x = v \cos \alpha \tag{2}$$

и аналогично

$$\dot{y} = v_y = v \sin \alpha. \tag{3}$$

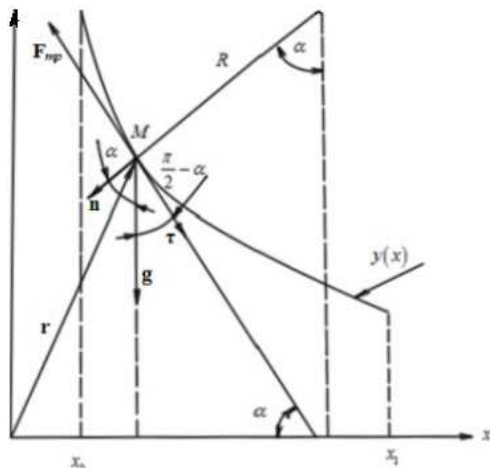


Рис. 1: Схематическое изображение геометрии задачи. По осям x, y откладываются координаты, m

Поделив оба уравнения в (1) друг на друга, найдем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\dot{v}}{v^2} \frac{dl}{d\alpha} \tag{4}$$

(здесь мы учли, что $R = \frac{dl}{d\alpha}$). Отсюда сразу же следует уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha d\alpha = -\frac{dv}{v}, \tag{5}$$

которое очевидным образом получается из цепочки простых равенств $\dot{v}dl = \dot{v} \frac{dl}{dt} dt = v dv$. После интегрирования (5) имеем

$$v = C_1 |\cos \alpha|, \tag{6}$$

где константа интегрирования $C_1 > 0$. Из верхнего уравнения системы (1) находим

$$\alpha = -\frac{gt}{C_1}. \tag{7}$$

С учетом (6) и (7) решения уравнений (2) и (3) немедленно приводят к следующим параметрическим зависимостям

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C_1^2}{4g} \left(\frac{2gt}{C_1} + \sin \left(\frac{2gt}{C_1} \right) \right), \\ y(t) = \frac{C_1^2}{4g} \left(1 - \cos \left(\frac{2gt}{C_1} \right) \right). \end{cases} \tag{8}$$

Как видно из (8), полученная параметрическая зависимость описывает класс семейства кривых $y = y(x, C_1)$, которые можно проиллюстрировать с помощью рис.2. Надо заметить, что найденная зависимость немного отличается от принятого в задаче о брахистохроне решения, которое приводится, например, в [1]. С помощью методов вариационного исчисления в функционале $\Delta t \{y\} = \int_1 \frac{dl}{v(y)}$ скорость движения выбирается в виде $v = \sqrt{2gy}$, что не совсем соответствует действительности. В самом деле, согласно закону сохранения энергии $E = \frac{mv^2}{2} + mgy$, откуда скорость $v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$, где $y_0 = \frac{2E}{mg}$. Легко проверить, что в этом случае мы как раз и приходим к параметрической зависимости (8). Заметим, к слову, что в случае, если $C_1 \gg gt$, из (8) следует, как и должно быть, движение по семейству параболических траекторий с постоянной вдоль оси x скоростью, то есть

$$\begin{cases} x = C_1 t, \\ y = \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{9}$$

Или $y = \frac{g}{2C_1^2} x^2$.

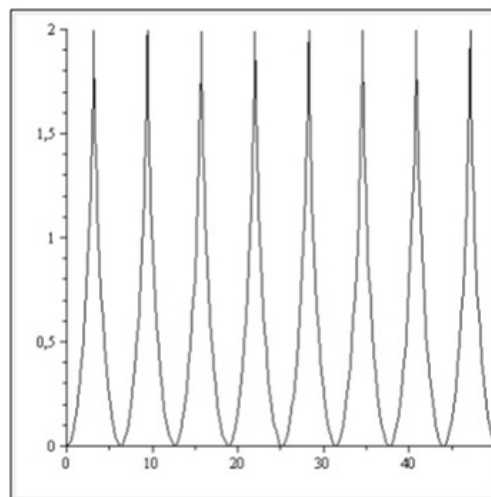


Рис. 2: Графическое изображение зависимости через параметр в отсутствие трения. По обеим осям здесь и на остальных рисунках откладываются относительные значения координат x/a и y/a

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ АНАЛИЗ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ

Рассмотрим теперь более сложную задачу, когда учитываются, как трение о желоб (сухое трение), так и вязкостное. В классическом подходе к подобного рода задачам нам следует записать общее выражение для диссипативной функции [4], которую в рамках решаемой задачи можно представить в виде следующей существенно положительной величины $\dot{Q} = -2 \int F_{fr} dv$, где множитель «2» введен здесь для удобства, а F_{fr} — суммарная сила трения. Если принять за основу вязкостного сопротивления обычную линейную зависимость от скорости движения, то есть

$$F_{1fr} = -k_1 v, \tag{10}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности, а силу сопротивления при сухом трении выбрать в виде

$$F_{2fr} = \hat{k}_2 mg, \tag{11}$$

где \hat{k}_2 — безразмерный тензор трения, m — масса тела, а g — ускорение силы тяжести, то получаем $\dot{Q} = k_1 v^2 + 2k_2 mgv = k_1 (v_x^2 + v_y^2) + 2k_2 mgv$, где k_2 — обычный коэффициент трения. Из рис. 1 видно, что в подвижном базисе $\mathbf{n}, \mathbf{\tau}$ в этом случае получается следующая система уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = g \sin \alpha - \frac{k_1}{m} v - k_2 g \cos \alpha \left(1 + \frac{|R|}{R} \right), \\ v^2 = -Rg \cos \alpha. \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что второе слагаемое в круглых скобках происходит благодаря учету дополнительного нормального давления, появляющегося из-за центробежной силы.

Как видно из верхнего уравнения системы (12), в стационарном режиме, когда $\dot{v} = 0$, происходит переход на стационарный режим движения со скоростью

$$v_{cm} = \frac{mg}{k_1} \left[\sin \alpha - k_2 \cos \alpha \left(1 + \frac{|R|}{R} \right) \right]. \tag{13}$$

С учетом уже знакомого нам по решению уравнений (1) анализа, имеем отсюда

$$\begin{cases} \dot{v} = g \sin \alpha - \frac{k_1}{m} v - k_2 g \cos \alpha \left(1 + \frac{|R|}{R} \right), \\ \dot{\alpha} v = -g \cos \alpha, \end{cases} \tag{14}$$

(после замены $Rd\alpha = dl$). Для решения системы (14) удобно проделать следующие преобразования. Выражая v из нижнего уравнения, то есть $v = -\frac{g \cos \alpha}{\dot{\alpha}}$ и, подставляя в верхнее, приходим в результате к уравнению

$$\ddot{\alpha} - \frac{k_1}{m} \dot{\alpha} - 2k_2 \dot{\alpha}^2 = 0, \tag{15}$$

которое относительно $\dot{\alpha}$ представляет собой уравнение Бернулли, а его решение с помощью элементарной замены $\dot{\alpha} = \frac{1}{z}$ приводит к зависимости (при $R > 0$)

$$\alpha(t) = \frac{1}{2k_2} \ln \left| \frac{C_2}{1 - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} e^{\frac{k_1 t}{m}}} \right|, \tag{16}$$

где $C_{1,2}$ — константы интегрирования. Поэтому, в соответствии с нижним уравнением системы (14) получаем

$$v = gC_1 \left| e^{-\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} \right| \cos \alpha. \tag{17}$$

Подставляя, наконец, это решение в (2) и (3), будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x = gC_1 \left| e^{-\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} \right| \times \\ \times \cos^2 \left[\frac{1}{2k_2} \ln \left| \frac{C_2}{1 - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} e^{\frac{k_1 t}{m}}} \right| \right], \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = v_y = -\frac{1}{2} gC_1 \left| e^{-\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} \right| \times \\ \times \sin \left[\frac{1}{k_2} \ln \left| \frac{C_2}{1 - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} e^{\frac{k_1 t}{m}}} \right| \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Выбирая здесь константу $C_2 = 1$, и интегрируя по времени, находим искомое решение нашей задачи в квадратурах

$$x(t) = a \int_0^p |e^{-u} - b| \cos^2 \left[\frac{1}{2k_2} \ln |1 - 2bk_2 e^u| \right] du, \tag{20}$$

$$y(t) = -\frac{a}{2} \int_0^p |e^{-u} - b| \sin \left[\frac{1}{k_2} \ln |1 - 2bk_2 e^u| \right] du, \tag{21}$$

где верхний предел интегрирования есть безразмерный параметр $p = \frac{k_1 t}{m}$, а остальные определены соотношениями

$$\begin{aligned} a &= \frac{mgC_1}{k_1}, \\ b &= \frac{m}{C_1 k_1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Как видно из решений (20) и (21), существует одна особая точка «фазового перехода», определяемая равенством $u_0 = \ln \left(\frac{1}{2k_2 b} \right)$, для которой происходит срыв траекторий с одного класса на качественно другой, о чем свидетельствуют приведенные ниже рисунки. Как видно из решений (20) и (21), в предельном

случае $k_2 \rightarrow 0$ (сухое трение отсутствует или $R < 0$), получим

$$x(t) = a \int_0^P e^{-u} \cos^2 (be^u) du, \quad (23)$$

$$y(t) = -\frac{a}{2} \int_0^P e^{-u} \sin (2be^u) du. \quad (24)$$

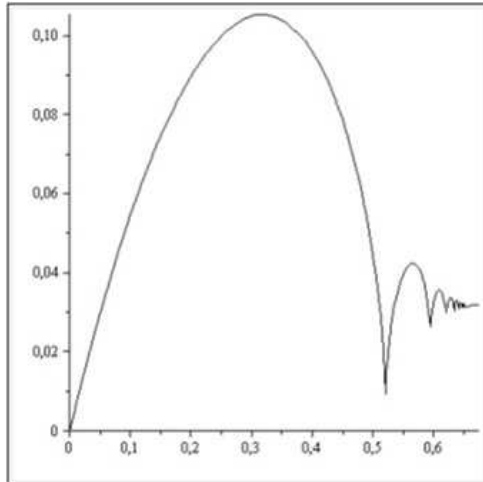


Рис. 3: Графическое изображение зависимости через параметр с учетом лишь вязкого трения шарика в желобе. $k_1 = 1$

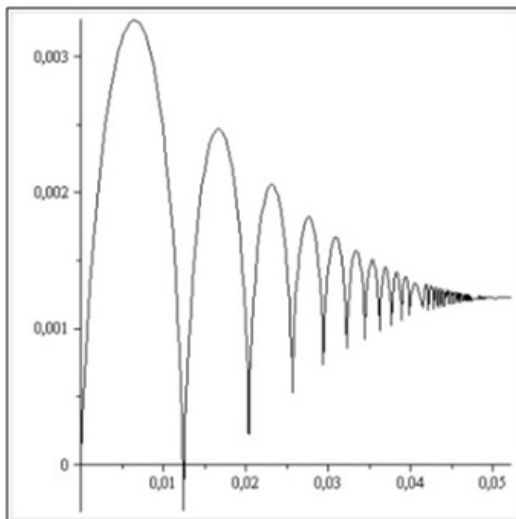


Рис. 4: Графическое изображение зависимости через параметр с учетом лишь вязкого трения шарика в желобе. $k_1 = 0.1$

Фактически формулами (20)–(24) решение поставленной задачи может считаться законченным. В случае решений (23)–(24) затухающий брахистохрон можно изобразить в соответствии с рис. 3, 4. В более сложном

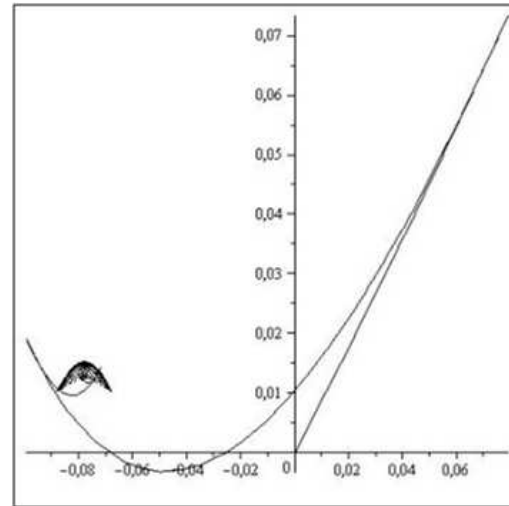


Рис. 5: Для параметров $b = 1, 2k = 0.1$ показано качественное изменение траектории при переходе через точку «геометрического фазового» перехода $u_0 = \ln 10 \approx 2.3$

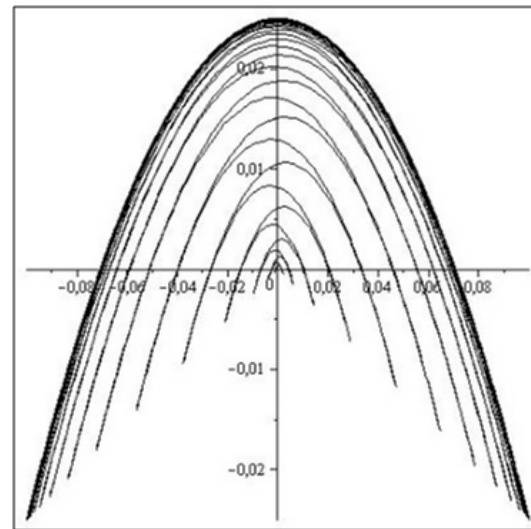


Рис. 6: Для параметров $b = 10, 2k = 0.1$ критическое значение параметра $u_0 = 0$. Характерный вид траектории показывает ее «насыщение» со временем в соответствии с уравнением (13) наподобие математического маятника без трения

случае, а именно, когда учитываются оба типа трения и сухое и вязкостное, траекторию можно проиллюстрировать с помощью рис. 5–7, на которых изображены различные типы затухающих брахистохрон в зависимости от констант C_1 и $k_{1,2}$ семейства решений $y(x, C_1, k_1, k_2)$. На рис. 3, 4 изображены брахистохроны при $u < u_0$, а на рис. 5, 6 — при $u > u_0$. Вблизи значения $u = u_0$ на рис. 7 показана локальная область хаоса.

Заметим также, что впервые решение этой задачи было приведено в [5]. Однако, стоит обратить внимание, что приведенное в сборнике [5] решение, было по-

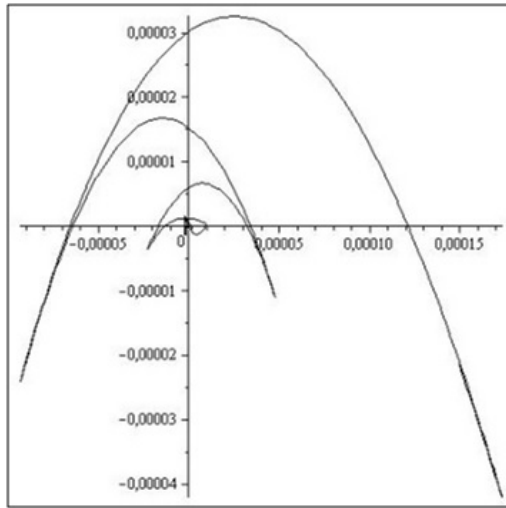


Рис. 7: Для параметров $b = 1$, $2k = 0.1$ поведение траектории вблизи точки «геометрического фазового» перехода $u_0 = \ln 10 \approx 2.3$ в окрестности радиуса порядка 0.1

лучено путем введения диссипативной функции, и явилось следствием анализа вариационной задачи, исходя из принципа наименьшего действия. При этом, оно оказалось несколько более громоздким, чем даваемое весьма компактными формулами (20)–(24). Напомним, что их компактность есть следствие правильности выбора весьма удобной в этом случае подвижной системы координат \mathbf{n}, τ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая это небольшое сообщение, хотелось бы в заключении отметить два основных момента.

1. С помощью несложных уравнений криволинейного движения найден класс единственного семейства функциональных зависимостей $y = y(x, C)$, описывающих форму желоба, по которому может двигаться под действием одной лишь силы тяжести любое материальное тело, как в отсутствии трения, так и при его учете.
2. Доказательство прозвучавшего утверждения связано с элементарным фактом возможности движения тела только по найденному классу траекторий, поскольку ограничений чисто математического и физического характеров на их форму нет. Это связано с тем, что в соответствии с уравнениями Гамильтона, описывающими чисто консервативные системы, при их получении не накладывалось каких-либо ограничений на вид функций, кроме возможности дифференцирования, и которые (хотя и неявно) сами являются следствием наименьшего действия, как второй закон Ньютона.

Авторы выражают искреннюю признательность профессору С. Д. Бенеславскому за внимание к работе и критические замечания, учет которых позволил существенно улучшить качество статьи.

- [1] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. (М.: Наука, 1969).
- [2] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. (М.: Мир, 1974).
- [3] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 2. (М.: Наука, 1965).

- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 6. (М.: Наука, 1988).
- [5] Гладков С. О. Сборник задач по теоретической и математической физике. (М.: Физматлит, 2006).

Geometric phase transition in the problem of brachistochrone

S. O. Gladkov^a, S. B. Bogdanova^b

Moscow Aviation Institution (National Research University) (MAI)
4, Volokolamskoe shosse, A-80, Moscow 125993, Russia
E-mail: ^asglad@newmail.ru, ^bsonjaf@list.ru

It is found analytical solution of problem I. Bernoulli on the brachistochrone with frictional forces (viscous, proportional to speed motion and dry). It is shown that its solution is represented only in the form quadratures. With the aid of the numerical calculation are given different figures of optimum trajectories under dissipation conditions. It is proven that in the absence frictional forces any motion along the curvilinear chute under the action only of gravitational force is always reduced to the task about the brachistochrone. It is found the point «geometric phase transition». This point corresponds to the disruption of brachistochrones from one class of trajectories to qualitatively another class. It is shown that with steady state the trajectory takes the form of the usual parabola, motion along which is periodically like the pendulum.

PACS: 05.45.-a.

Keywords: brahistohron, dry friction, viscous friction, instantaneous coordinate system, «geometric phase transition», numerical modelling.

Received 11.03.2016.

Сведения об авторах

1. Гладков Сергей Октябринович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (499) -158-46-47, e-mail: sglad@newmail.ru.
2. Богданова Софья Борисовна — кандидат физ.-мат. наук, доцент; тел.: (499) 158-46-47, e-mail: sonjai@list.ru.