Изучение темы «Вращательное движение твердого тела» в курсе общей физики

Д. В. Белов[1], А. С. Нифанов[2,*] И. М. Сараева[1†]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, [1]кафедра общей физики
[2]кафедра общей физики и физики конденсированного состояния
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 22.01.2016; подписана в печать 30.01.2016)

Эта статья — преамбула к подробному изложению раздела механики «Вращательное движение твердого тела» на младших курсах в вузах. Она разъясняет смысл понятий и определений, используемых в этом разделе, таких как вращательное движение вокруг оси, момент инерции, момент импульса, мгновенная ось вращения, эллипсоид инерции, тензор инерции.

PACS: 45.40.-f УДК: 531.38
Ключевые слова: твердое тело, момент импульса, вращательное движение, мгновенная ось вращения, момент инерции, эллипсоид инерции, тензор инерции.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе конспективно (коротко о главном) обсуждаются основные понятия и физические величины, определяющие вращательное движение твердого тела такие как, вращение вокруг закрепленной точки, вращение вокруг закрепленной оси, момент импульса, момент инерции, эллипсоид инерции, мгновенная ось вращения, тензор инерции.

Тема работы выбрана не случайно. Интерес к ней объясняется тем, что с вращательным движением приходится встречаться в различных отраслях науки и техники.

1. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращательным движением твердого тела называется движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных некоторой неподвижной относительно тела прямой линии, и с центрами на этой прямой. Эта прямая называется осью вращения.

Если ось вращения не меняет со временем своей ориентации ни относительно выбранной системы отсчета, ни относительно тела, движение тела называется вращением вокруг закрепленной оси. В случае, когда тело имеет одну неподвижную точку и через нее проходит прямая, поворотом вокруг которой в данный момент времени тело перемещается из данного положения в бесконечно близкое, эта прямая называется мгновенной осью вращения. Совокупность вращений вокруг различных мгновенных осей, которые может совершать тело с одной неподвижной точкой в течение времени, называется вращением тела вокруг закрепленной точки.

A. Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной точки

Это уравнение является основой обсуждаемой темы, поэтому целесообразно начать с его вывода. Пусть твердое тело движется так, что одна его точка остается неподвижной в выбранной инерциальной системе отсчета и совпадает с началом координат, точкой O, этой системы (рис. 1).

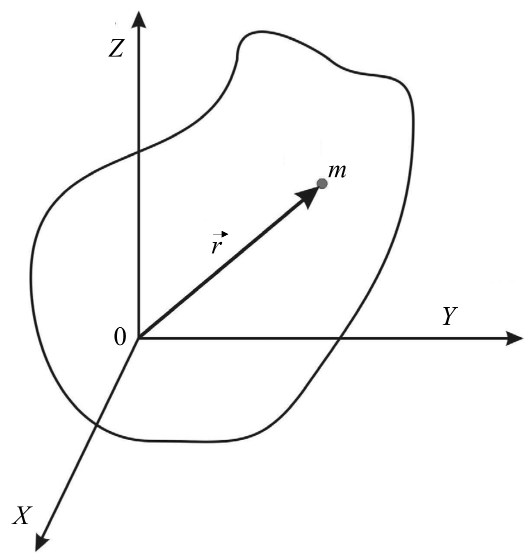

Рис. 1

Запишем уравнение второго закона Ньютона для произвольной материальной точки тела:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс точки, m и $\mathbf{v}$ — ее масса и скорость, $\mathbf{F}$ — сумма всех сил, действующих на эту точку (внешних и внутренних). Умножая обе части уравнения векторно слева на радиус-вектор $\mathbf{r}$ данной точки

*E-mail: nifanov@physics.msu.ru
†E-mail: e.majorana@mail.ru

относительно точки O, получим следующее уравнение:

$$\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}.$$

Покажем, что

$$\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right).$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где первое слагаемое правой части равно нулю, так как векторы $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ коллинеарны.

Окончательно, для произвольной материальной точки твердого тела, вращающегося вокруг точки O, получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right)=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{1}$$

Физическая величина $\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ называется моментом импульса материальной точки. Просуммируем уравнение (1) по всем материальным точкам тела:

$$\sum\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right)=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{2}$$

Величина $\mathbf{L}=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ называется моментом импульса твердого тела относительно неподвижной точки (точки O).

С учетом этого определения уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{F}.$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой сумму моментов внешних и внутренних сил, действующих на различные точки тела, относительно точки O. Пользуясь третьим законом Ньютона, нетрудно доказать, что сумма моментов внутренних сил равна нулю. Окончательно, уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}, \tag{3}$$

где $\mathbf{M}$ обозначает сумму моментов всех внешних сил, действующих на различные точки твердого тела относительно неподвижной точки O.

Уравнение (3) называется уравнением вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной точки, или уравнением моментов: производная по времени момента импульса твердого тела относительно закрепленной точки равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно этой же точки, действующих на различные точки тела.

B. Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси

Если тело вращается вокруг закрепленной оси (например, тело закреплено в подшипниках), то все точки тела движутся по окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси, и с центрами на этой оси (см. рис. 2).

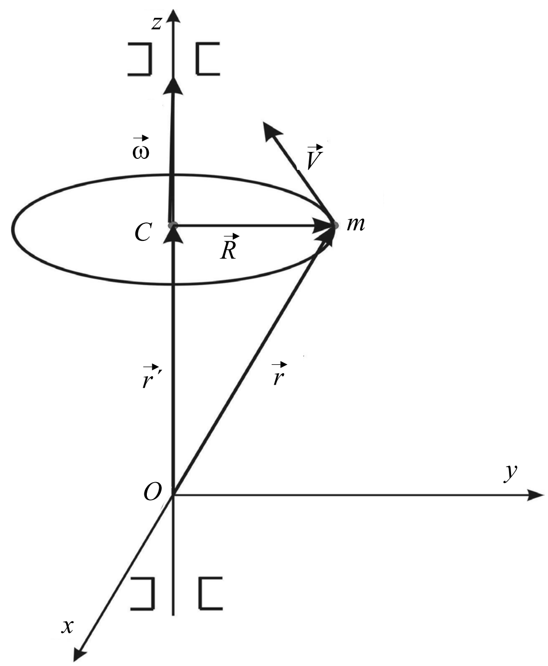

Рис. 2

Направим ось z неподвижной системы координат (x,y,z) вдоль оси вращения, а начало координат поместим в произвольную точку O на оси вращения.

Для каждой точки справедливы следующие равенства: $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{R}$, $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$. Учтем их и запишем выражение для момента импульса тела $\mathbf{L}$ относительно точки O в виде:

$$\mathbf{L}=\sum m\mathbf{r}'\times\mathbf{v}+\sum m\mathbf{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}).$$

Раскрывая двойное векторное произведение второго слагаемого по правилу

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

получим равенство:

$$\mathbf{L}=\sum m\mathbf{r}'\times\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\sum mR^2. \tag{4}$$

Проекция L_z вектора $\mathbf{L}$ на ось z называется моментом импульса твердого тела относительно оси z. Так как в уравнении (4) первое слагаемое в правой части есть вектор, перпендикулярный оси z, проекция L_z определяется равенством:

$$L_z=\omega_z\sum mR^2,$$

где $J = \sum mR^2$ — скалярная положительная величина, являющаяся коэффициентом пропорциональности между L_z и ω_z, называется моментом инерции тела относительно оси z. Таким образом,

$$L_z = J\omega_z. \tag{5}$$

Проекция уравнения (3) на закрепленную ось с учетом (5) может быть записана в следующем виде:

$$J\varepsilon_z = M_z, \tag{6}$$

где $\varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt}$ — угловое ускорение, M_z — проекция на закрепленную ось момента внешних сил. Уравнение (6) называется уравнением вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

2. ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

Момент инерции $J = \sum mR^2$ является характеристикой инертных свойств тела при вращении вокруг оси и зависит от массы тела и ее распределения относительно оси вращения. Другими словами, J зависит от взаимного расположения тела и оси вращения. Рассмотрим простейший случай: тело плоское, система координат (xOy) жестко связана с телом, закрепленная ось вращения $A'A$ лежит в плоскости тела и проходит через начало координат, точку O. Положение оси вращения относительно осей координат (и, следовательно, относительно тела) определяется углами α и β (рис. 3). Выразим момент инерции J через углы α и β и координаты точек тела.

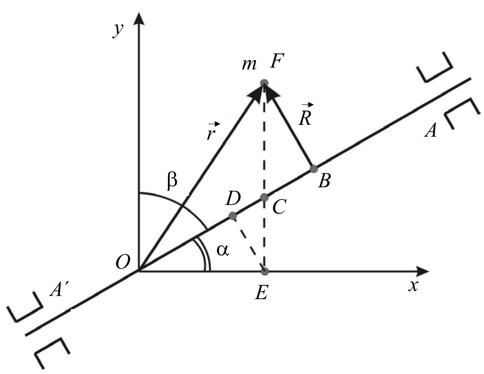

Рис. 3

Момент инерции тела J относительно оси AA': $J = \sum mR^2 = \sum m(r^2 - OB^2)$; учтем, что $r^2 = x^2 + y^2$, где x, y — координаты произвольной точки с массой m; учтем также, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Определим OB. Из рис. 3 видно, что $OB = OD + DC + CB$. Так как $OD = x\cos\alpha$, $DC = EC\cos\beta$, $CB = FC\cos\beta$, $EC + FC = y$, получаем $OB = x\cos\alpha + y\cos\beta$.

Для момента инерции J находим:

$$J = \sum m(x^2 + y^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - 2xy\cos\alpha\cos\beta),$$

откуда, проведя преобразования, получаем

$$J = \sum my^2\cos^2\alpha + \sum mx^2\cos^2\beta - \sum 2mxy\cos\alpha\cos\beta.$$

Введем следующие обозначения: $J_{xx} = \sum my^2$, $J_{yy} = \sum mx^2$ — это моменты инерции тела относительно координатных осей x и y соответственно, они называется осевыми и являются положительными скалярными величинами; $J_{xy} = \sum mxy$ называется центробежным моментом инерции, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от ориентации тела относительно осей координат.

В этих обозначениях

$$J = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\cos^2\beta - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \tag{7}$$

Момент импульса относительно оси $A'A$ описывается следующим равенством:

$$L = J\omega,$$

где J определено в (7).

В общем случае, когда тело имеет произвольную форму, а положение закрепленной оси относительно осей координат определяется углами α, β и γ, вычисление J, аналогичное предыдущему, но только более громоздкое, приводит к следующему результату:

$$J = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\cos^2\beta + J_{zz}\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma, \tag{8}$$

где

$$J_{xx} = \sum m(y^2 + z^2), \quad J_{yy} = \sum m(x^2 + z^2),$$

$$J_{zz} = \sum m(x^2 + y^2),$$

$$J_{xy} = \sum mxy, \quad J_{xz} = \sum mxz, \quad J_{yz} = \sum myz.$$

Уравнение (8) описывает зависимость J от взаимного расположения тела и оси вращения. Эту зависимость можно интерпретировать графически.

Построение эллипсоида инерции

Преобразуем уравнение (8), разделив обе его части на J:

$$\frac{J_{xx}}{J}\cos^2\alpha + \frac{J_{yy}}{J}\cos^2\beta + \frac{J_{zz}}{J}\cos^2\gamma - \\ - 2\frac{J_{xy}}{J}\cos\alpha\cos\beta - 2\frac{J_{xz}}{J}\cos\alpha\cos\gamma - \\ - 2\frac{J_{yz}}{J}\cos\beta\cos\gamma = 1. \tag{9}$$

Координатные оси Ox, Oy, Oz жестко связаны с телом, а начало координат находится в произвольной точке O тела. Через точку O проведем пучок прямых, направление каждой из которых определено углами α, β и γ, отсчитываемыми от координатных осей. От точки O вдоль каждой прямой отложим в одном и том же произвольном масштабе отрезки длины $l = 1/\sqrt{J}$. Координаты концов этих отрезков в системе (x, y, z) будут численно равны: $\xi = l\cos\alpha$, $\eta = l\cos\beta$, $\zeta = l\cos\gamma$, так что $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = l$. Учитывая эти равенства и обозначив $a = 1/\sqrt{J_{xx}}$, $b = 1/\sqrt{J_{yy}}$, $c = 1/\sqrt{J_{zz}}$, для любых α, β и γ, т. е. для любой закрепленной оси, согласно (8), получаем уравнение:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-2J_{xy}\xi\eta-2J_{xz}\xi\zeta-2J_{yz}\eta\zeta = 1. \quad (10)$$

Это уравнение поверхности второго порядка, являющейся эллипсоидом с центром в точке O (рис. 4). Эллипсоид, описываемый уравнением (10), называется эллипсоидом инерции относительно точки O тела.

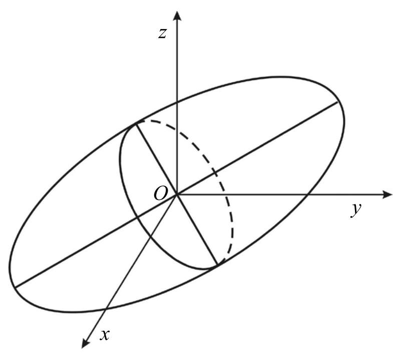

Рис. 4

В каждом эллипсоиде можно провести три взаимно перпендикулярные прямые, ортогональные поверхности эллипсоида в точках пересечения с ней. Эти прямые называются главными осями эллипсоида. Точка их пересечения является центром эллипсоида.

Координатные оси, связанные с телом и направленные параллельно главным осям эллипсоида называются главными осями тела. Эллипсоид инерции, построенный относительно главных осей тела, пересекающихся в точке O, называется главным эллипсоидом инерции относительно точки O. Из аналитической геометрии известно, что относительно главных осей уравнение эллипсоида упрощается (в нем исчезают слагаемые с произведениями различных координат) и принимает вид:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} = 1. \quad (11)$$

Ориентация главного эллипсоида инерции относительно координатных осей показана на рис. 5. В симметричном теле главными осями являются оси симметрии и все параллельные им прямые. Главные оси, проходящие через центр масс тела, называются главными центральными осями. А главный эллипсоид с центром в центре масс называется главным центральным эллипсоидом инерции. Главные эллипсоиды в разных точках тела имеют одинаковую ориентацию, но разную форму, поскольку определяемые ими моменты инерции отличаются от соответствующих моментов главного центрального эллипсоида на величины, определяемые теоремой Гюйгенса—Штейнера.

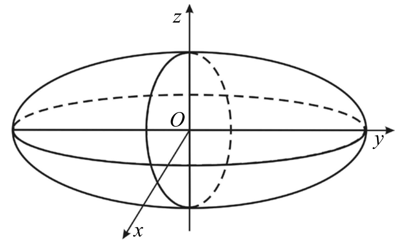

Рис. 5

Эллипсоид инерции является наглядной геометрической интерпретацией анизотропии вращательного движения.

3. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Запишем момент импульса

$$\mathbf{L} = \sum m\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \sum m\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \\ = \sum mr^2\boldsymbol{\omega} - \sum m(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$$

через координаты радиус–векторов точек тела и компоненты вектора мгновенной угловой скорости в произвольной неподвижной системе координат с началом в закрепленной (неподвижной) точке тела. Учитывая, что $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}$, получим уравнение

$$\mathbf{L} = \sum m(x^2+y^2+z^2)(\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}) - \\ - \sum m(x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).$$

Путем несложных преобразований можно привести это уравнение к виду:

$$\mathbf{L} = \left(\sum m(y^2+z^2)\omega_x - \sum mxy\omega_y - \sum mxz\omega_z\right)\mathbf{i} + \\ + \left(-\sum myx\omega_x + \sum m(x^2+z^2)\omega_y - \sum myz\omega_z\right)\mathbf{j} + \\ + \left(-\sum mzx\omega_x - \sum mzy\omega_y + \sum m(x^2+y^2)\omega_z\right)\mathbf{k}.$$

Принимая во внимание ранее введенные обозначения (см. (8)), последнее уравнение можно записать в виде:

$$\mathbf{L} = (J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)\,\mathbf{i} + \\ + (-J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z)\,\mathbf{j} + \\ + (-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z)\,\mathbf{k}.$$

В матричном исчислении последнее уравнение записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

В этом уравнении элементы матрицы являются компонентами тензора инерции. Строгое определение тензорных величин и операций с ними выходит за рамки общего курса физики.

Если оси координат совпадают с главными осями тела, то последние уравнения приобретают следующий вид:

$$\mathbf{L} = J_{xx}\omega_x\mathbf{i} + J_{yy}\omega_y\mathbf{j} + J_{zz}\omega_z\mathbf{k}, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — моменты инерции тела относительно главных осей.

Из уравнений (12) и (13) следует, что при вращении тела вокруг мгновенной оси в общем случае момент импульса $\mathbf{L}$ не совпадает по направлению с осью вращения. Векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ сонаправлены в частном случае, при условии выполнения равенства $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz}$, что имеет место, например, при вращении однородного шара или однородного куба с неподвижной точкой в центре масс.

4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Кинетическая энергия T твердого тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени определяется следующим равенством $T = \frac{1}{2}\sum mv^2$, где $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ — линейная скорость движения произвольной точки тела вокруг мгновенной оси, $\mathbf{r}$ — радиус вектор этой точки с началом в неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость. Кинетическую энергию можно записать в виде: $T = \frac{1}{2}\sum m\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Произведем дважды циклическую перестановку векторов в смешанном произведении, получим равенство: $T = \frac{1}{2}\sum m\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, из которого следует: $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \sum \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Окончательно получаем:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \tag{14}$$

В системе координат с началом в неподвижной точке тела и осями, совпадающими с главными направлениями в теле, кинетическая энергия T, с учетом (12), определяется уравнением:

$$T = \frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2\right). \tag{15}$$

5. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА

Симметричным гироскопом называется твердое тело, обладающее симметрией вращения относительно некоторой оси, которая называется осью фигуры гироскопа, и быстро вращается относительно этой оси.

Для определенности будем считать, что гироскоп представляет собой быстро вращающийся вокруг своей оси тонкий цилиндрический стержень, в середине которого закреплен однородный диск так, что плоскость диска перпендикулярна стержню, а точка закрепления O совпадает с центром масс гироскопа.

A. Свободный симметричный гироскоп в кардановом подвесе

Для изучения свободного движения гироскопа поместим его в карданов подвес (рис. 6). Концы стержня гироскопа AA' закрепим в подшипниках на концах одного из диаметров внутреннего кольца. Внутреннее кольцо закреплено в подшипниках на концах одного из диаметров внешнего кольца BB'. Внешнее кольцо вращается вокруг оси DD', проходящей через подшипники подставки. Оси AA' и BB', а также оси и взаимно перпендикулярны. Все три оси AA', BB' и DD' пересекаются в неподвижной точке O, являющейся центром масс гироскопа.

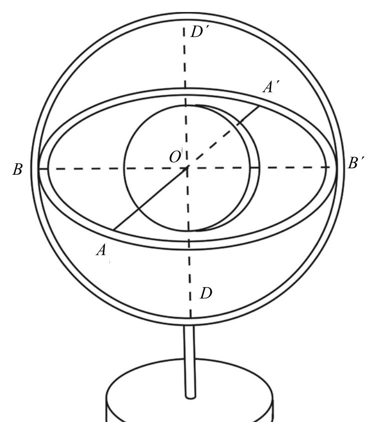

Рис. 6

Если предположить, что кольца карданова подвеса симметричны относительно своих осей и трение в подшипниках отсутствует, гироскоп можно считать свободным. Он может занимать любое положение, одновременно вращаясь вокруг своей оси и относительно еще двух осей (BB' и DD') вместе со своей осью.

В данном случае гироскоп в кардановом подвесе можно рассматривать как свободное симметричное тело, закрепленное в центре масс O. В каждый момент времени движение гироскопа будем рассматривать относительно системы координат, оси которой в этот момент времени совпадают с главными центральными осями гироскопа.

Осью z назовем ось быстрого вращения. Обозначим $J_{xx} = J_{yy} = A$ (гироскоп симметричный), $J_{zz} = C$.

Поскольку гироскоп свободный, его кинетическая энергия $T = \text{const}$ и момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{const}$. Воспользуемся уравнениями (12) и (15):

$$\mathbf{L} = A(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + C\omega_z \mathbf{k} = \mathbf{const},$$

отсюда

$$\begin{cases} L^2 = A^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C^2\omega_z^2 = \text{const}, \\ 2T = A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2 = \text{const}. \end{cases}$$

Из системы последних двух уравнений получаем $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const}$, $\omega_z^2 = \text{const}$, следовательно, модуль мгновенной угловой скорости $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \text{const}$. Итак, для свободного симметричного гироскопа $A, C, T, \mathbf{L}, \omega$ — постоянные величины.

1. Определим взаимную ориентацию $\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}$ и оси гироскопа Oz. Из уравнения (14) следует, что $2T = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = L\omega \cos\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$, $\cos\varphi = 2T/(L\omega) = \text{const}$, следовательно, $\phi = \text{const}$. Вектор $\mathbf{L} = \mathbf{const}$ не изменяет со временем ни величины, ни направления в пространстве, мгновенная скорость $\boldsymbol{\omega}$ не меняется со временем лишь по модулю, следовательно, мгновенная ось вращения со временем описывает конус вокруг $\mathbf{L}$ с вершиной в неподвижной точке O, центре масс тела.

Угол α между $\boldsymbol{\omega}$ и осью гироскопа Oz определяется равенством: $\cos\alpha = \omega_z/\omega = \text{const}$, следовательно, $\alpha = \text{const}$. Это означает, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ описывает относительно оси гироскопа конус с углом при вершине конуса 2α (см. рис. 7).

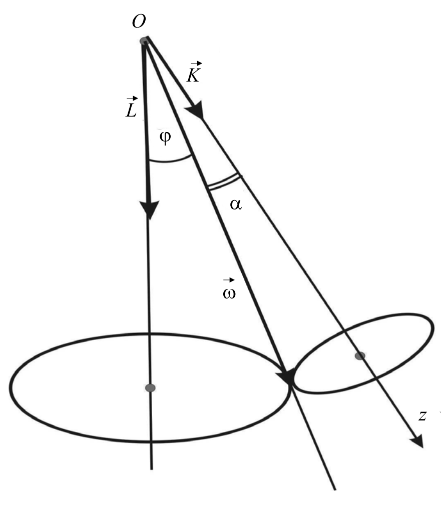

Рис. 7

В частном случае при $\omega = \omega_z$, $\cos\alpha = 1$, $\alpha = 0$, $\cos\varphi = 2T/(L\omega) = C\omega^2/\left(C\omega^2\right) = 1$, $\varphi = 0$, т. е. момент импульса $\mathbf{L}$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ совпадают по направлению. Этот случай реализуется на практике в демонстрационных опытах с гироскопами, в которых диск вращается с угловой скоростью в несколько десятков оборотов в секунду и больше, а вращение оси происходит медленнее, чем одна десятая оборота в секунду. При таком соотношении скоростей направление момента импульса $\mathbf{L}$ отличается от направления $\vec{\omega}$ меньше, чем на $1°$.

2. Покажем, что у симметричного свободного гироскопа (в кардановом подвесе) $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{k}$ лежат в одной плоскости. Введем вектор $\mathbf{N} = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}$. По определению векторного произведения $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ лежат в плоскости, к которой $\mathbf{N}$ перпендикулярен. Имеем

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A\omega_x & A\omega_y & C\omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = \\ = (A\omega_y\omega_z - C\omega_z\omega_y)\,\mathbf{i} + (C\omega_z\omega_x - A\omega_x\omega_z)\,\mathbf{j} + \\ + (A\omega_x\omega_y - A\omega_y\omega_x)\,\mathbf{k},$$

откуда видно, что $N_z = 0$, значит $\mathbf{N} \perp \mathbf{k}$. Следовательно, $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{k}$ и лежат в одной плоскости.

3. Определим собственную угловую скорость $\mathbf{b}$ гироскопа и скорость $\mathbf{a}$ его прецессии.

Мгновенная угловая скорость $\vec{\omega}$ равна векторной сумме угловой скорости $\mathbf{b}$ вращения фигуры гироскопа вокруг своей оси z и угловой скорости $\mathbf{a}$ вращения оси гироскопа вокруг направления момента импульса $\mathbf{L}$ (рис. 8), $\mathbf{b}$ называется собственной угловой скоростью гироскопа, $\mathbf{a}$193 — скоростью свободной регулярной прецессии гироскопа.

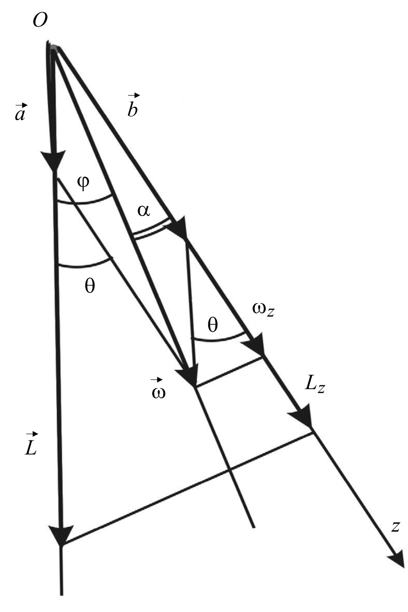

Рис. 8

Определим величину a. Из рис. 8 видно, что

$$a\sin\theta = \omega\sin\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{\omega_z}{\omega},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}}{\omega},$$

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L}, \quad \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{L_z}{L}\right)^2} = \frac{A\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}}{L},$$

откуда

$$a = \omega\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = \frac{L}{A}. \qquad (16)$$

Определим величину b. Из параллелограмма (см. рис. 9) получаем:

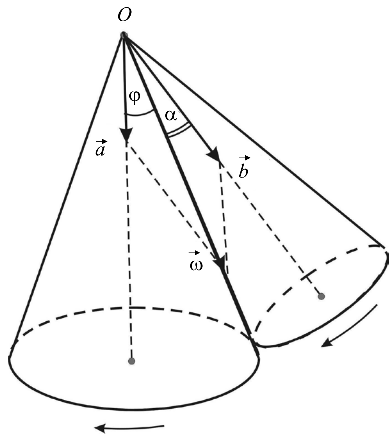

Рис. 9

$$\omega = a\cos\varphi + b\cos\alpha. \qquad (17)$$

Из уравнения (14)

$$\cos\varphi = \frac{2T}{L\omega},$$

откуда и из (16) и (17) получаем:

$$b = \frac{\omega - a\cos\varphi}{\cos\alpha} = \frac{\omega - \frac{L}{A}\frac{2T}{L\omega}}{\omega_z/\omega} = \frac{A\omega^2 - 2T}{A\omega_z} = \frac{A\omega^2 - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}}{A\omega_z}.$$

Преобразуем это равенство, учитывая, что

$$A\omega^2 = A(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2), \quad \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} = A\omega_x^2 + A\omega_y^2 + C\omega_z^2,$$

и окончательно получим

$$b = \frac{A-C}{A}\omega_z. \qquad (18)$$

Если $\omega \simeq \omega_z$, $\alpha \simeq 0$ и $\varphi \simeq 0$, тогда (см. (17)) $\omega \simeq a + b$. То же иначе: $\omega \simeq \omega_z$, тогда $a = L/A \simeq C\omega/A$, $b \simeq (A-C)\omega/A$, отсюда $\omega \simeq a + b$.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Однородный, тонкий, цилиндрический стержень длины l и массы m жестко скреплен с вертикальной спицей OO' в своей средней точке C, как показано на рис. 10. Угол между стержнем и спицей равен α. Спица закреплена в подшипниках и система вращается без трения с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Определить величину и направление момента импульса $\mathbf{L}$ стержня относительно оси OO'. Считать радиус сечения стержня $r \ll l$.

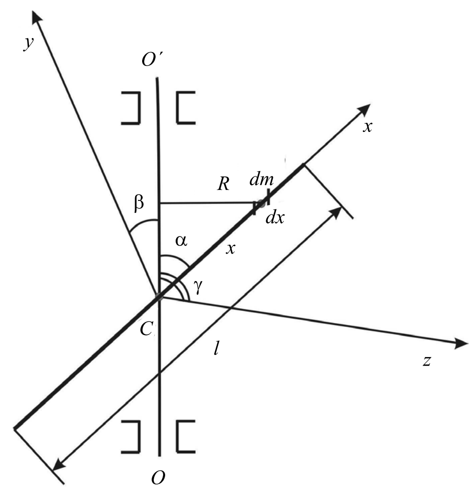

Рис. 10

Решение 1. Момент инерции J стержня относительно неподвижной оси OO', согласно (5) равен $J = \sum dmR^2$, где $dm = (m/l)dx$ — масса элемента стержня длины l, находящегося на расстоянии x от точки C и на расстоянии $R = x\sin\alpha$ от OO'. Учитывая сказанное и заменяя суммирование интегрированием, получаем

$$J = 2\frac{m}{l}\sin^2\alpha\int_0^{l/2} x^2dx = \frac{ml^2}{12}\sin^2\alpha.$$

Момент импульса $\mathbf{L}$ относительно OO' по величине равен

$$L = J\omega = \omega\frac{ml^2}{12}\sin^2\alpha$$

и направлен так же как $\vec{\omega}$ вдоль оси OO'.

Решение 2.

Если взаимное расположение оси вращения OO' и стержня определять углами α, β и γ, которые составляет OO' с главными осями x, y, z стержня, указанными на рис. 10, то момент инерции J можно описать равенством, следующим из (8):

$$J = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\cos^2\beta + J_{zz}\cos^2\gamma. \qquad (\star)$$

В нашем случае углы равны α, $\beta = \pi/2 - \alpha$, $\gamma = \pi/2$, а моменты инерции относительно главных осей равны $J_{xx} \simeq 0$ (так как по условию $r \ll l$), $J_{yy} = J_{zz} = ml^2/12$. Подставляя эти значения в равенство $(\star)$, получаем: $J = ml^2\sin^2\alpha/12$. Момент импульса L относительно оси OO' равен $L = J\omega = \omega ml^2\sin^2\alpha/12$. Этим методом решения особенно удобно пользоваться, когда известен эллипсоид инерции в данной неподвижной точке C.

Задача 2. Однородный тонкий цилиндрический стержень длины l и массы m может вращаться в вертикальной плоскости вокруг своей неподвижной средней точки C (рис. 10). Через эту точку проходит вертикальная ось OO', вокруг которой стержень равномерно вращается с угловой скоростью ω, располагаясь под углом α к оси OO'. Предполагается, что $r \ll l$, где r —- радиус сечения стержня. Определить величину и направление момента импульса $\mathbf{L}_C$ стержня относительно точки C.

Решение. В каждый момент времени будем рассматривать движение стержня относительно неподвижной системы координат, оси которой совпадают с главными осями стержня, а начало координат находится в неподвижной точке C. Тогда, согласно уравнениям (12) и (13), для момента импульса стержня относительно точки C справедливы равенства:

$$\mathbf{L}_C \equiv \mathbf{L} = J_{xx}\omega_x\mathbf{i} + J_{yy}\omega_y\mathbf{j} + J_{zz}\omega_z\mathbf{k},$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

В нашей задаче $\omega_x = \omega\cos\alpha$, $\omega_y = \omega\sin\alpha$, $\omega_z = 0$; $J_{xx} \cong 0, J_{yy} = J_{zz} = ml^2/12$. Поэтому

$$\mathbf{L}_C = J_{yy}\omega_y\mathbf{j} = \mathbf{j}\frac{ml^2}{12}\omega\sin\alpha;$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ ml^2\omega\sin\alpha/12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что в каждый момент времени $\mathbf{L}_C$ направлен перпендикулярно стержню и под углом $\pi/2-\alpha$ к оси вращения.

Задача 3. Круглый однородный диск массы m и радиуса R вращается с угловой скоростью ω_x вокруг горизонтальной оси CD и одновременно ось CD вращается вокруг вертикальной оси AB, проходящей через центр диска O, с угловой скоростью ω_y. Определить величину и направление мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, величину и направление момента импульса $\mathbf{L}$ в тот же момент времени относительно неподвижной точки OO (см. рис. 11).

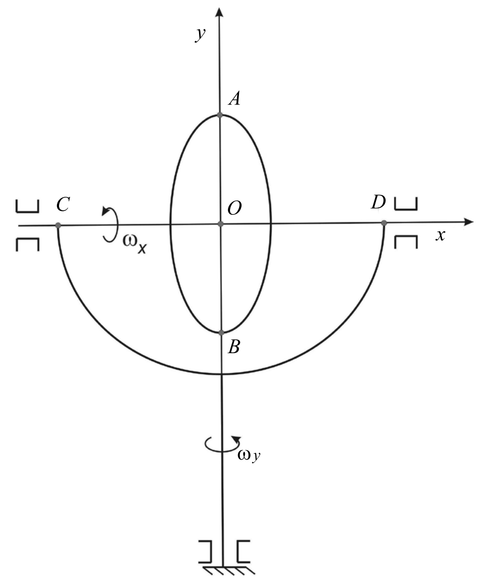

Рис. 11

Решение. Имеем (см. рис. 12)

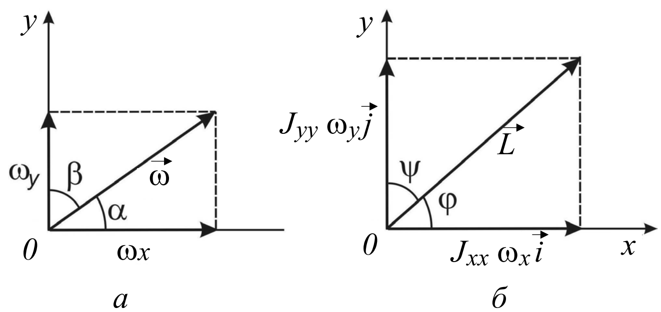

Рис. 12

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j},$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\omega_y}{\omega_x}, \quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{\omega_x}{\omega_y} = \pi/2 - \alpha.$$

Оси x и y совпадают с главными осями диска, относительно этих осей $\mathbf{L}$ определяется равенством:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $\mathbf{L} = J_{xx}\omega_x\mathbf{i} + J_{yy}\omega_y\mathbf{j}$; вектор $\mathbf{L}$ составляет с осями x и y углы $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{J_{yy}\omega_y}{J_{xx}\omega_x}$ и $\psi = \pi/2 - \varphi$, соответственно.

Определим J_{xx} и J_{yy}.

1. Вычисление J_{xx}

Заштрихованная площадь (см. рис. 13) равна $dS = rd\varphi dr$, масса элемента диска $dm = \sigma dS$, где σ — масса единичной площади диска. Момент инерции этого элемента диска $dj = r^2\sigma dS = \sigma r^3 dr d\varphi$. Момент инерции кольца с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ относительно оси x равен $dJ_{xx} = \sigma r^3 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma r^3 dr$, так что искомый момент инерции

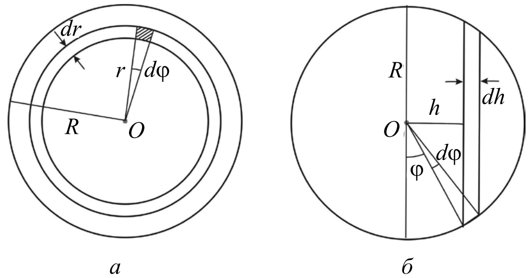

Рис. 13

$$J_{xx} = \int dJ_{xx} = 2\pi\sigma \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 = \frac{1}{2}mR^2.$$

2. Вычисление J_{yy}

Как видно из рис. 13, $h = R\sin\varphi$, $dh = R\cos\varphi d\varphi$; площадь полоски шириной dh равна $dS = 2R\cos\varphi dh = 2R^2\cos^2\varphi d\varphi$, а ее масса $dm = \sigma dS = 2\sigma R^2\cos^2\varphi d\varphi$. Момент инерции диска относительно оси y равен

$$J_{yy} = 2\int h^2 dm = 4\sigma R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma R^4 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{4}\pi\sigma R^4 = \frac{1}{4}mR^2.$$

Итак,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}mR^2\omega_x\mathbf{i} + \frac{1}{4}mR^2\omega_y\mathbf{j},$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega_y}{2\omega_x}, \quad \psi = \pi/2 - \varphi.$$

Задача 4. Круглый прямой конус с углом полураствора α, радиусом основания R и высотой H катится равномерно без скольжения по горизонтальной плоскости (см. рис. 14). Вершина конуса закреплена шарнирно в точке O, которая расположена на одном уровне с центром основания конуса точкой C. Скорость точки C равна v. Найти мгновенную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ конуса и угол, который образует этот вектор с вертикалью. Найти момент импульса $\mathbf{L}$ конуса относительно точки O и угол, который образует этот вектор с вертикалью.

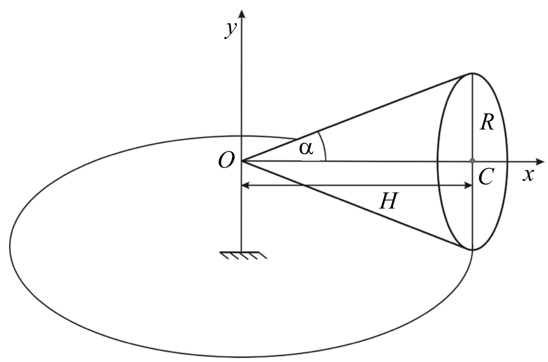

Рис. 14

Решение. Начало неподвижной системы координат совпадает с закрепленной точкой O, а оси в рассматриваемый момент времени направлены вдоль главных осей конуса. $\omega_x = \dfrac{v}{R}$ вследствие отсутствия скольжения, $\omega_y = \dfrac{v}{R\mathrm{ctg}\alpha}$. Модуль мгновенной скорости вращения $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \dfrac{v}{R\cos\alpha}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}$, $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\omega_x}{\omega_y} = \mathrm{ctg}\alpha$, $\beta = \pi/2 - \alpha$ — угол, который составляет вектор $\boldsymbol{\omega}$ с вертикалью. Мгновенная ось вращения проходит через закрепленную точку O и точку касания B конуса с плоскостью.

Момент импульса $\mathbf{L}$ относительно точки O равен (см. рис. 15):

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} = J_{xx}\omega_x\mathbf{i} + J_{yy}\omega_y\mathbf{j},$$

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{J_{xx}\omega_x}{J_{yy}\omega_y}.$$

Вычислим величины J_{xx} и J_{yy}.

1. Вычисление J_{xx}

Разобьем конус на диски, параллельные основанию, бесконечно малой толщины. Рассмотрим один из них, находящийся на расстоянии h от вершины O и имеющий толщину dh. Высота конуса H, радиус основания R. Конус однородный, его плотность обозначим ρ.

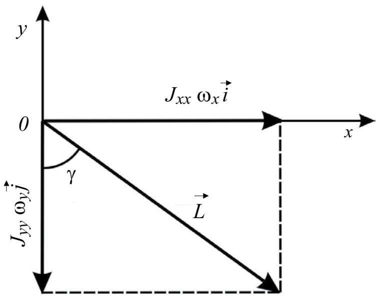

Рис. 15

Момент инерции диска dJ_{xx} относительно оси конуса OC равен:

$$dJ_{xx} = \frac{1}{2}r^2dm = \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dh,$$

из геометрии следует равенство $\dfrac{h}{r} = \dfrac{H}{R}$, отсюда получаем $dh = \dfrac{H}{R}dr$, подставим это выражение в уравнение для dJ_{xx}, проинтегрируем его по r, находим искомое значение:

$$J_{xx} = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{H}{R}\int\limits_0^R r^4dr = \frac{1}{10}\rho\pi H R^4.$$

Учтем, что объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, а его масса $m = \rho V$, и получаем окончательно

$$J_{xx} = \frac{3}{10}mR^2.$$

2. Вычисление J_{yy}

В этом случае представляем конус, как совокупность таких же дисков, как и в первом случае. Момент dJ_{yy} инерции описывается равенством $dJ_{yy} = \frac{1}{4}r^2dm + h^2dm$, в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера,

$$J_{yy} = \frac{1}{4}\rho\pi\frac{H}{R}\int\limits_0^R r^4dr + \rho\pi\frac{R^2}{H^2}\int\limits_0^H h^4dh = \\ = \frac{1}{20}\rho\pi H R^4 + \frac{1}{5}\rho\pi R^2 H^3.$$

После преобразований, аналогичных проведенным в п. 1, получаем окончательно

$$J_{yy} = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mH^2.$$

Момент импульса $\mathbf{L}$ можно в результате описать равенством

$$\mathbf{L} = \frac{3}{10}mR^2\omega_x\mathbf{i} + \left(\frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mH^2\right)\omega_y\mathbf{j}.$$

Поскольку $J_{xx} \neq J_{yy}$, то и $\beta \neq \gamma$, т. е. момент импульса $\mathbf{L}$ и угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают по направлению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изложили только основы динамики вращательного движения твердого тела. Для углубленного изучения этой темы студентам рекомендуется обратиться к книгам [1–11].

Благодарности

Авторы выражают благодарность проф. А. В. Борисову за поддержку идеи работы и полезные замечания.

[1] *Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А.* Университетский курс общей физики. Механика твердого тела. Лекции. (М., Физический ф-т МГУ, 1997).

[2] *Белянкин А. Г., Мотулевич Г. П., Четверикова Е. С., Яковлев И. А.* Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. В. И. Ивероновой. (М., Наука, 1967).

[3] *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Берклеевский курс физики. Т. I. Механика. Пер. с англ. (М., Наука, 1971).

[4] *Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. (М., Наука, 1969).

[5] *Петкевич В. В.* Теоретическая механика. (М., Наука, 1981).

[6] *Салецкий А. М., Слепков А. И.* Университетский курс общей физики. Механика твердого тела. Лабораторный практикум. (М., Физический ф-т МГУ, 1999).

[7] *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. В 5 т. Т. I. Механика. 4-е изд, стереот. (М., ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005).

[8] *Стрелков С. П.* Механика. 4-е изд., стереот. (СПб., Лань, 2005).

[9] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 2. Пространство. Время. Движение. Пер. с англ. (М., Мир, 1965).

[10] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Краткий курс теоретической физики. Книга 2. Механика. Электродинамика. (М., Наука, 1969).

[11] *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике. 3-е изд., испр. (СПб., Лань, 2001).

Study of the unit «Rotational motion of a rigid body» in the course of general physics

D. V. Belov[1], A. S. Nifanov[2a], I. M. Saraeva[1b]

[1]*Department of General Physics and Condensed Matter Physics,*
[2]*Department of General Physics*
Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]nifanov@physics.msu.ru, [b]e.majorana@mail.ru

This paper is a preamble to the detailed presentation of the classical mechanics unit “Rotational motion of a rigid body” for minor students in higher school. It clarifies the meaning of notions and definitions used in this unit, such as the rotational motion about an axis, moment of inertia, angular momentum, instantaneous axis of rotation, ellipsoid of inertia, and inertia tensor.

PACS: 45.40.-f

Keywords: rigid body, angular momentum, rotational motion, instantaneous axis of rotation, moment of inertia, ellipsoid of inertia, inertia tensor.

Received 22 January 2016

Сведения об авторах

1. Белов Дмитрий Владимирович — кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-11-42.
2. Нифанов Александр Семенович — кандидат физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-36-32, e-mail: nifanov@physics.msu.ru.
3. Сараева Ирина Макаровна — кандидат физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-41-88, e-mail: e.majorana@mail.ru.