Неравновесная макроскопическая динамика фондового рынка как системы термодинамического типа

А. В. Дмитриев,* Н. В. Марков
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет бизнеса и менеджмента
Россия, 105187, Москва, ул. Кирпичная, 33/5
(Статья поступила 26.11.2015; подписана в печать 02.12.2015)

Работа посвящена построению и анализу модели неравновесной макроскопической динамики фондового рынка как системы термодинамического типа. Получена трехмерная динамическая система, описывающая наиболее важные процессы, происходящие на фондовом рынке — формирование равновесной цены и возникновение динамического хаоса. Динамическими переменными системы являются цены спроса и предложения и их эластичность.

PACS: 89.65.Gh УДК: 517.938.5, 519.246.87
Ключевые слова: модель фондового рынка, динамический хаос, равновесная цена, система Лоренца.

ВВЕДЕНИЕ

Замкнутые системы термодинамического типа стремятся перейти в равновесное состояние. Состояния такой системы распадаются на три характерных класса: равновесные, квазиравновесные и неравновесные состояния. В рамках стохастической динамики особый интерес представляют неравновесные макроскопические состояния систем. Переход системы из равновесного состояния в неравновесное происходит в результате действия факторов, называемых возмущениями системы.

Одной из основных задач неравновесной стохастической динамики является изучение реакции макроскопических систем на различные возмущения, выводящие ее из равновесия. При малых возмущающих воздействиях процесс релаксации является линейным процессом. Линейная релаксация реализуется в том случае, когда индуцируемые неравновесные потоки соответствующих «физических» величин оказываются пропорциональными величинам соответствующих обобщенных термодинамических «сил». Теория линейной релаксации называется теорией Онзагера [1].

Величины, характеризующие скорость переноса какой-либо «физической» величины в системе, принято называть плотностями «тока» соответствующей величины или просто «потоками». Обобщенная термодинамическая «сила» — это любой фактор неравновесности, приводящий к переносу «чего-либо» от одних объектов к другим. Обычно потоки в неравновесной термодинамике обозначают символом J_i $(i = 1, 2, ...)$, а обобщенные термодинамические силы X_j. В феноменологической теории линейной релаксации Л. Онзагер постулировал (линейную по X_j) систему уравнений, связывающих потоки с вызывающими их силами:

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k.$$

Коэффициенты пропорциональности L_{ik} называют кинетическими коэффициентами. Когда обобщенные силы X_j относительно малы, то эти коэффициенты можно (с высокой степенью точности) считать постоянными, т. е. не зависящими от X_j. В практике неравновесной феноменологической термодинамики они обычно определяются из эксперимента.

Существует также другой подход к определению неравновесной динамики сложных динамических систем в рамках теории стохастической динамики. Это подход основан на использовании структурной микролокальной информации, гипотезированной в структуре и взаимодействиях рассматриваемой системы. Он позволяет получить уравнения неравновесной макроскопической динамики, и явно определить зависимости кинетических коэффициентов от соответствующих наблюдаемых. Если эта зависимость оказывается существенной, то уравнения типа уравнений Онзагера становятся нелинейными по вариациям наблюдаемых макроскопических величин. Неравновесная и нелинейная стохастическая динамика в процессах обсуждаемого типа собственно и породила то научное направление, которое называют синергетикой [2,3].

Представленное исследование нацелено на применение его результатов к анализу экономической динамики фондового рынка, однако рассматриваемую математическую модель можно применить к динамике весьма широкого класса систем различной природы. В этом смысле поставленная задача не замыкается на концептуальную проблематику эконофизики [3].

В математической экономике возникло направление [3], изучающее финансовые рынки методами качественного анализа феноменов нелинейной динамики, одной из целей которого является обнаружение так называемых странных аттракторов, их типов и размерности, генерирующих динамический хаос в исследуемой

*E-mail: a.dmitriev@hse.ru

системе. Восстановление ценной динамической информации, скрытой во временном ряде, порожденном динамикой странного аттрактора представляется чрезвычайно сложной задачей.

Рассмотрим большие (макроскопические) фондовые рынки [4], т. е. такие, на которых действует много экономических агентов ($N \to \infty$), преследующих соответствующие собственные интересы и цели. Мы полагаем, что рынок — это такой организм, который из совокупного действия индивидуальных интересов и потребностей вырабатывает агрегированные факторы, которые начинают проявляться в макромасштабе и действовать по законам детерминированных связей и отношений.

Выбор подобных объектов исследования обусловлен тем, что современные фондовые рынки вооружены мощными компьютерными технологиями, которые позволяют осуществить управление, информатирование и документирование реальных экономических процессов, развертывающихся на таких рынках в режиме реального времени.

Изменение конъюнктуры подобных рынков происходит очень быстро, что позволяет получать репрезентирующие её временные ряды в малом масштабе времени. Это является необходимым условием для обнаружения детерминистской составляющей динамических процессов.

Мы выдвигаем и обосновываем гипотезу о том, что в основе определенного рода экономической динамики лежит некоторая базовая, возможно скрытая, динамическая структура, допускающая представление посредством определенной математической структуры. Будем рассматривать именно такие экономические структуры, которые допускают подобного рода математизацию.

Полагаем, что фондовый рынок с точки зрения возникших в нем обобщенных макроскопических потоков капиталов, товаров и услуг в фазовом пространстве соответствующей экономической динамической системы гомеоморфен динамическим системам, так называемого гидродинамического типа. Если в таких системах возникают взаимодействующие встречные потоки, то в них, как правило, возникает явление обобщённой турбулентности, порождающее кризисные режимы развития состояний таких динамических систем.

Цель нашей работы — исходя из термодинамических закономерностей, построить нелинейную динамическую модель фондового рынка, определять условия ее устойчивости и зарождения динамического хаоса.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНОГО ФОНДОВОГО РЫНКА

Определим функции и переменные состояния, которые будем использовать в математической модели неравновесного рынка: $Y_1(t)$ — локализованная вариата функции спроса; $Y_2(t)$ — локализованная вариата функции предложения; $X_1(t)$ — локально варьирующаяся цена спроса; $X_2(t)$ — локально варьирующаяся цена предложения; $Y_1^{(0)} = Y_2^{(0)} = Q_0$ — равновесные значения функций спроса и предложения в некотором равновесном состоянии рынка $E = (P_0, Q_0)$; $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = Q_0$ — равновесные значения цен спроса и предложения в равновесном состоянии рынка $E = (P_0, Q_0)$.

Введем обозначения:

$$y_i = \delta Y_i(t) = Y_i(t) - Q_0 \ (i = 1, 2),$$

$$x_i = \delta X_i(t) = X_i(t) - P_0 \ (i = 1, 2),$$

где y_1 и y_2 — вариации объемов спроса и предложения вблизи $E = (P_0, Q_0)$, x_1 и x_2 — вариации цен спроса и предложения вблизи $E = (P_0, Q_0)$. Переменные x_1, x_2, y_1, y_2 являются независимыми переменными функций агрегированного спроса на совокупный продукт $S(P, x_1, x_2)$ рассматриваемого рынка и агрегированного предложения совокупного продукта $D(P, x_1, x_2)$ на том же рынке.

Будем полагать, что $S(P, x_1, x_2)$ и $D(P, x_1, x_2)$ непрерывны и дифференцируемы по переменным x_1 и x_2 в малой окрестности точки $E = (P_0, Q_0)$.

Построим матрицу первых частных производных функций $S(P, x_1, x_2)$ и $D(P, x_1, x_2)$ вблизи точки $E = (P_0, Q_0)$:

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial x_1} & \dfrac{\partial S}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial D}{\partial x_1} & \dfrac{\partial D}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Если x_1 и x_2 (в относительном масштабе) малы, то с определенной степенью точности воспользуемся соотношениями Л. Онзагера [1], связывающие экстенсивные y_1, y_2 и интенсивные x_1, x_2 переменные (потоки и порождающие их движущие силы):

$$y = Lx. \quad (1)$$

В уравнении (1) $y = (y_1, y_2)$ и $x = (x_1, x_2)$. Матрица L образует матрицу феноменологических коэффициентов Онзагера L_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2$).

Экономическая динамика неравновесного рынка в силу отклонения спроса $Y_1(t)$ и предложения $Y_2(t)$ от их равновесного значения Q_0 должна индуцировать временное изменение вариации цен x_1 и x_2. В первом приближении такую динамику можно представить в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка:

$$\dot{x} = Ky, \quad (2)$$

где K — матрица, представляющая динамическую конъюнктуру фондового рынка.

Совместное решение (1) и (2) дает следующую систему ОДУ первого порядка:

$$\dot{x} = Ax, \quad (3)$$

где $A = KL$ — матрица, определяющая динамику фондового рынка.

Уравнение типа (3) можно получить не только из принципа Онзагера, но и из кинетических положений о динамике неравновесного фондового рынка. Однако этот аспект рассматриваемой проблемы в данной работе развивать не будем.

Проведем эконофизический анализ системы (3).

A. Динамика цен предложения

Если $x_1 = 0$, то $\dot{x}_2 = A_{22} x_2$. Локально варьирующаяся цена предложения $X_2(t)$ релаксационно приближается к равновесному значению P_0, следовательно $A_{22} < 0$. В таком случае время релаксации перехода $X_2 \to P_0$: $\tau_2 = 1/|A_{22}|$. Кроме того, вблизи состояния динамического равновесия $|x_1| = |x_2|$ должны также возникать состояния $\dot{x}_2 = 0$. Это возможно, если $|A_{22}| = A_{21} = 1/\tau_2$.

Следовательно, с точностью до величин первого порядка (по x_1 и x_2) второе уравнение системы (3) примет следующий вид:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau_2}(x_2 - x_1). \tag{4}$$

B. Динамика цен спроса

Аналогичные рассуждения относительно коэффициентов первого уравнения системы (3) приводят к тому, что $A_{11} = 1/\tau_1$, где τ_1 — характерное время релаксации процесса $X_1 \to P_0$. Если $|x_1|$ и $|x_2|$ достаточно малы, то $A_{12} = \mathrm{const}$. В этом случае решение системы (3) будут представлять собой шумовые релаксационные колебания вблизи положения равновесия $E = (P_0, Q_0)$.

С ростом амплитуды отклонений величин $X_1(t)$ и $X_2(t)$ от $E = (P_0, Q_0)$ вариации x_1 и x_2 начинают «цеплять» друг друга. В системе (3) возникает простейшее нелинейное взаимодействие между спросом и предложением. Следовательно, между переменными x_1 и x_2 существует зависимость, выражающая эластичность величины x_1 по величине x_1.

Пусть

$$A_{12}(t) = cE_{12}(t), \tag{5}$$

где $E_{12}(t)$ — эластичность величины x_1 по величине x_2, c — параметр, используемый для согласования размерностей. Выбором единиц измерения можно доказать, что $|c| = 1$.

Учитывая рассуждения выше и (5), второе уравнение системы (3) примет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau_1}x_1 + cE_{12}(t)\,x_2. \tag{6}$$

C. Динамика эластичности

Введем в рассмотрение динамическую переменную следующего вида:

$$x_3(t) = E_{12}^{(0)} - \tau_1 c E_{12}(t), \tag{7}$$

где $E_{12}^{(0)}$ — эластичность величины x_1 по величине x_2 в состоянии равновесия системы.

Сущность динамики неравновесного фондового рынка подсказывает, что в первом линейном приближении ОДУ, которому должна подчиняться переменная x_3 имеет следующий вид:

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau_E}x_3 + kx_1x_2, \tag{8}$$

где k — положительная постоянная, τ_E — характерное время релаксации перехода $E_{12} \to E_{12}^{(0)}$.

Совместное решение (7) и (8) приводит к следующему ОДУ для динамической эластичности:

$$\dot{E}_{12} = -\frac{1}{\tau_1}E_{12} - \frac{k}{c\tau_1}x_1x_2 + \frac{E_{12}^{(0)}}{c\tau_1\tau_E}. \tag{9}$$

Таким образом, объединяя в систему уравнения (4), (6) и (9), получим следующую систему ОДУ первого порядка, которая описывает неравновесный фондовой рынок:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}x_1 + cE_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}(x_2 - x_1), \\ \dot{E}_{12} = -\dfrac{1}{\tau_1}E_{12} - \dfrac{k}{c\tau_1}x_1x_2 + \dfrac{E_{12}^{(0)}}{c\tau_1\tau_E}. \end{cases} \tag{10}$$

2. АНАЛИЗ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНОГО ФОНДОВОГО РЫНКА

Упростим систему (10), сократив число ее параметров. Для этого введем следующие обозначения:

$$T = \frac{t}{\tau_1},\ x_1 = \sqrt{\frac{1}{k\tau_1}}y,\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{k\tau_1}}x,\ x_3 = z. \tag{11}$$

С учетом обозначений (11) система (10) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y), \\ \dot{y} = -y + \rho x - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \end{cases} \tag{12}$$

где $\sigma = \dfrac{\tau_1}{\tau_2}$, $\beta = \dfrac{\tau_1}{\tau_E}$, $\rho = E_{12}^{(0)}$, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dT}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dT}$, $\dot{z} = \dfrac{dz}{dT}$.

Система (12) с управляющими параметрами σ, β и ρ, известная как система Лоренца [5], описывает динамику модифицированных вариаций цен спроса и предложения, а также динамику модифицированной эластичности x_1 по x_2. Кроме динамики фондового рынка, система Лоренца описывает динамику многих физических систем — конвекцию в слое, конвекцию в кольцевой трубке, одномодовый лазер [6].

Система Лоренца является достаточно изученной динамической системой. Основные свойства системы представлены в работах [6,7,8]. Рассмотрим только те свойства системы, которые нам понадобятся для экономического анализа полученной модели.

Воспользуемся динамической системой для обсуждения вопроса о существовании устойчивой равновесной на рынке.

В рамках полученной нами модели, условием существования равновесной (не обязательно устойчивой) цены на рынке является равенство цен спроса и предложения $X_1 = X_2 = P_0$ или достижение системой состояния равновесия $E = (P_0, Q_0)$. Для вариаций цен спроса и предложения, это условие эквивалентно равенству $x_1 = x_2 = 0$.

Система (12) имеет три стационарные точки:

$$O\,(0,0,0)\,,\; E_{1,2}\left(\mp\sqrt{\beta\,(\rho-1)}, \mp\sqrt{\beta\,(\rho-1)}, 0\right). \quad (13)$$

Если $\rho < 1$, то нулевая точка O является асимптотически устойчивой. При этом не существует других действительных стационарных точек $E_{1,2}$. Значение параметра $\rho = 1$ является бифуркационным значением надкритической вилообразной бифуркации системы. Если $\rho > 1$, то стационарная точка O является неустойчивой.

Стационарные точки $E_{1,2}$ с действительными координатами имеют место при $\rho > 1$. Причем, если $1 < \rho < \rho_c$, то точки являются устойчивыми; если $\rho > \rho_c$, то — неустойчивыми. Здесь $\rho_c = \sigma\dfrac{\sigma+\beta+3}{\sigma-\beta-1}$.

Следовательно, только при $\rho < 1$ (малоэластичный рынок) на фондовом рынке может существовать устойчивая равновесная цена.

При достаточно больших $\rho \geq 28$ (т.е. при большой эластичности $E_{12}^{(0)}$) в системе (12) возникают хаотические «перескоки» изображающей фазовой точки от одного центра притяжения к другому: $E_1 \rightleftarrows E_2$ [8]. Подобные «перескоки» и «наматывания» фазовой траектории на центры притяжения E_1 и E_2 носят очень сложный и аналитически не вычисляемый характер. При $T \to \infty$ «паутина» фазовой траектории заполняет особую притягивающую область вблизи центров E_1 и E_2, которую называют странным аттрактором (в нашем случае еще добавляют имя собственное — Лоренца). Экономическая интерпретация подобных явлений — появление финансовых временных рядов, порождаемых нелинейной динамической системой.

Аттрактор Лоренца не является исключением в множестве дифференциальных динамических систем. Аттракторы являются типичным явлением в дифференциальных динамических системах [9].

Аттракторы представляют собой один из примеров появления и проявления такого эволюционного феномена, который стали называть образным словом «катастрофа» [10]. Катастрофы в динамическом их воплощении как раз и приводят к возникновению такого феномена, как динамический хаос.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перспективность полученной модели неравновесного фондового рынка определяется ее практическими приложениями, прежде всего, — возможностью анализа и прогнозирования финансовых временных рядов. Речь идет о реконструкции базовой динамической системы (10) по эмпирическим финансовым рядам [7].

В сложных динамических системах, и в частности в системах со сложной экономической динамикой, существует базовая нелинейная динамика, которая в различных режимах своего проявления порождает наблюдаемые последовательности своих состояний — временные ряды. Полученные из эмпирических наблюдений и «хорошо» организованные временные ряда несут в себе содержательную информацию о детерминистической (причинной) составляющей динамики, формирующей эти ряды.

Актуальной и важной задачей является разработка эффективной методики (методологии) обнаружения особенностей динамического поведения стохастических временных рядов с опорой на определенные представления о базовой нелинейной динамике, формирующей подобные ряды. Конечная цель подобного исследования — найти (обнаружить) эффективно действующие критерии, которые позволяли бы предсказывать кризисные (катастрофические) развития процессов в достаточном (для оперативного развертывания антикризисных мероприятий) интервале времени. Это одна из задач рискологии [11]. Она составляет прагматическую составляющую подобного рода исследований. Существуют и другие составляющие, непосредственно не связанные с экономической деятельностью. Анализ временных рядов представляет проблему универсальную и общезначимую. Одной из граней этой проблемы является обнаружение и выявление базовой динамической составляющей, присутствующей во временных рядах определенного типа.

Нами предложен подход к моделированию активности фондовых финансовых рынков на основе динамик цен спроса и предложения. Атомарными элементами (агентами) системы являются экономические контрагенты, которые могут «играть» на повышение или понижение цены, образуя «потоки». Анализ формирования цен спроса и предложения контрагентами, и вследствие этого — финансовых потоков, позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемый экономический процесс эквивалентен процессу конвективного движения жидкости, описываемый системой Лоренца. Действительно, имеет место закрытая экономическая система, в которой количество финансовых контрагентов как атомарных элементов системы остается условно постоянным (или изменение их количества незначительно). Для моделирования конвективного движения жидкости системой Лоренца используются векторные данные о потоках жидкости, а также данные об изменениях температуры среды. В данной работе используются данные об отклонениях цен спроса и предложения на какие-либо активы от равновесной цены и эластичность цен как коррелирующий динамический показатель (аналогично температуре жидкости). С ростом параметра ρ характер финансовой динамики меняется — от ламинарного движения до хаотического турбулентного. При больших ρ финансовая динамика становится чувствительной к малым изменениям начальных условий, что позволяет описывать кризисные состояния системы.

[1] *Хаазе З.* Термодинамика необратимых процессов. (М.: Мир, 1967).
[2] *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. (М.: Мир, 2002).
[3] *Занг В.Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. (М.: Мир, 1999).
[4] *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. (М.: Мир, 2000).
[5] *Lorenz E.* J. Atm. Scie. **20**, N 2. P. 130. (1963).
[6] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. (М.: Физматлит, 2001).
[7] *Лоскутов О.Ю.* УФН. **180**, № 12. С. 1305. (2010).
[8] *Ленфорд О.* Изображение аттрактора Лоренца, полученное с помощью компьютера. Странные аттракторы. (М.: Мир, 1981).
[9] *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. (М.: Мир, 1975).
[10] *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: В 2-х кн. (М.: Мир, 1984)..
[11] *Буянов В.П., Кирсанов К.А., Михайлов Л.М.* Рискология. (М.: Экзамен, 2003).

Non-equilibrium macroscopic dynamics of the stock market as a thermodynamic system type

A.V. Dmitriev[a], N.V. Markov

National Research University — Higher School of Economics
Moscow 105187, Russia, Kirpichnaya Str., 33/5.
E-mail: [a]a.dmitriev@hse.ru

The work deals with the obtaining and analysis of model of non-equilibrium macroscopic dynamics of the stock market as a thermodynamic type system. We obtained a three-dimensional dynamic system, describing the most important processes occurring in the stock market — the formation of equilibrium prices and the emergence of dynamic chaos. The dynamic variables of the system are the ask and bid prices.

PACS: 89.65.Gh

Keywords: stock market model, dynamic chaos, equilibrium price, Lorenz system.

Received 26 November 2015.

Сведения об авторах

1. Дмитриев Андрей Викторович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 775-95-90*55070, e-mail: a.dmitriev@hse.ru.
2. Марков Николай Владимирович — преподаватель; тел.: (495) 306-26-83, e-mail: nmarkov@hse.ru.