Комплексный анализ базового элемента емкостных датчиков

М. А. Сивков[1], Ю. К. Алешин[1],* М. А. Чоба[2†]
[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, химический факультет, кафедра электрохимии Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д стр. 3*

PACS: 41.20.Cv УДК: 537.222.1
Ключевые слова: Электростатика, электроемкость, пьезокварцевый датчик

Применение емкостных датчиков чрезвычайно многообразно. Они используются в системах регулирования и управления производственными процессами почти во всех отраслях промышленности, применяются для контроля заполнения резервуаров веществом. Но классическая формула для определения емкости конденсатора недостаточно точна, и не учитывает краевые эффекты и конечную толщину пластин, что приводит к большой погрешности в сверхточных измерениях с конденсаторами малых размеров, в которых расстояние между пластинами порядка линейного размера самих пластин. Анализу и учету факторов, влияющих на внесение погрешностей в показания датчика, и посвящена данная работа.

Вышесказанное приводит к следующей задаче: учет влияние краевых эффектов и способы их устранения. Проблема в том, что задача об определении поля конденсатора решается точно лишь для очень узкого круга примеров. В основном это уединенные проводники, обладающие при этом определенной симметрией. Поэтому для определения емкости конденсаторов различных форм применяются специальные методы расчета. В данной работе подсчет произведен методом средних потенциалов.

Исходя из вариационного принципа Гаусса, для емкости можно написать неравенство

$$C \geq C\left[\sigma\right] = \frac{\left\{\int ds_i \sigma\left(r_i\right)\right\}^2}{\sum_{i=1,2}\int ds_i \sigma\left(r_i\right)\varphi\left(r_i\right)}, \tag{1}$$

где

$$\varphi\left(r_i\right) = \sum_{j=1,2}\int \frac{ds_j}{\left|r_i - r_j\right|}\sigma(r_i). \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) ds_i — элемент площади проводника, $\sigma\left(r_i\right)$ — поверхностная плотность зарядов, $\varphi\left(r_i\right)$ — потенциал.

Функционал $C\left[\sigma\right]$ достигает своего максимального значения C на точном решении задачи, соответствующим минимуму энергии электростатического поля (теорема Томсона). Истинное распределение заряда чаще всего неизвестно, и в методе средних потенциалов задается фиктивное распределение зарядов по поверхности или в объеме тел, заменяющих проводники. При этом поверхности каждого из тел приписывается постоянный потенциал, равный среднему арифметическому значений потенциала во всех точках тела. Эту величину называют средним потенциалом проводника. При указанном способе определения значения потенциала наиболее распространенным является допущение о том, что заряд распределен по поверхности равномерно. Таким образом, потенциал пластин находится по формуле

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon S^2}\int dS'\int\frac{dS}{R}. \tag{3}$$

Здесь интегралы берутся по поверхности S рассматриваемого проводника, Q — полный заряд на поверхности, R — расстояние между точками поверхности проводника.

Данным методом было получено точное решение для емкости круглого плоскопараллельного конденсатора

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{4h}{a^2} + \frac{32}{3\pi a}\left(1 - \frac{1-q^2}{q^3}K\left(q\right) + \frac{1-2q^2}{q^3}E(q)\right)\right). \tag{4}$$

Здесь a — радиус пластин, h — расстояние между пластинами, $K(q)$ и $E(q)$ — эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно, а $q^2 = \dfrac{4a^2}{h^2+4a^2}$.

Сравнение значений емкостей, полученных с помощью формулы (4) и классической формулы $C = \dfrac{\varepsilon\pi a^2}{h}$, представлено на рисунке 1. Видно, что уже при значениях h/a больших 0.4 разница в значениях емкостей составляет порядка 30 % и возрастает с увеличением параметра h/a.

Однако пользоваться формулой (4) при значениях параметра $h/a > 2.5$ нельзя, так как в при $h/a \cong 2.7$ знаменатель (4) обращается в ноль. Это легко видеть на графике функции (4).

*E-mail: vovur@mail.ru
†E-mail: machoba@mail.ru

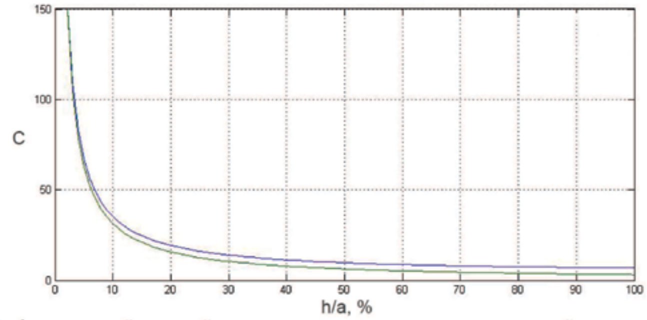

Рис. 1: Графики значений ёмкостей, полученных при использовании полученной и классической формул, по оси абсцисс отложено значение отношение h/a в процентах.

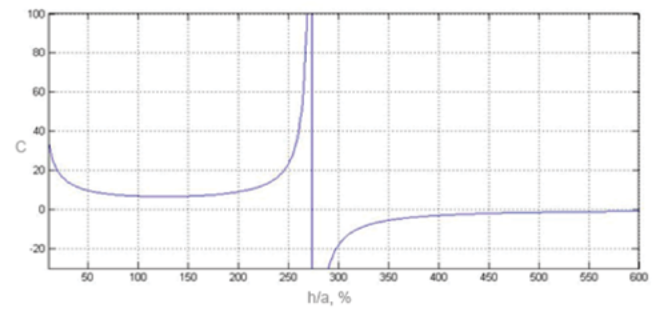

Рис. 2: График функции (4) с особенностью в точке $h/a \cong 2.7$.

Обойти это можно, произведя разложение в ряд Тейлора подынтегральных выражений в эллиптических интегралах первого и второго родов по малому параметру $q \ll 1$.

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - q^2 sin^2\varphi}} \cong \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{q^2 sin^2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi q^2}{8},$$

$$E(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - q^2 sin^2\varphi}\, d\varphi \cong \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{q^2 sin^2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi q^2}{8},$$

$$q = \frac{2a}{h\sqrt{1 + \frac{4a^2}{h^2}}} \cong \frac{2a}{h}\left(1 - \frac{2a^2}{h^2} + \frac{a^4}{2h^4}\right).$$

Подставляя в (4) для $h/a > 2.5$, получаем формулу

$$C \cong \frac{4\varepsilon a}{1 - \frac{2}{\pi}\frac{a}{h}\left(1 - \frac{7}{12}\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{33}{40}\left(\frac{a}{h}\right)^4\right)} \qquad (5)$$

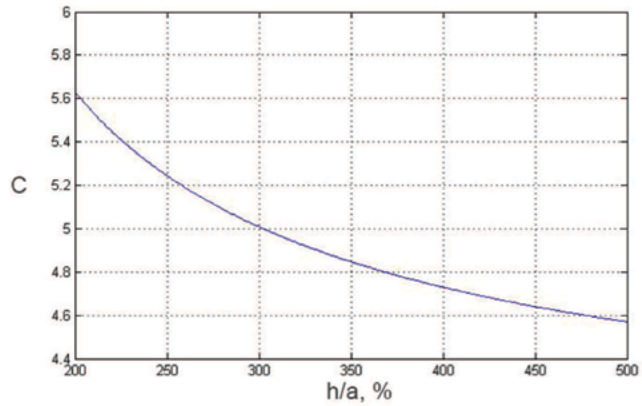

Рис. 3: График функции (5).

График функции (5) представлен на рис. 3. Следует также отметить, что формула (5) при $h/a > 2.5$ обеспечивает точность с погрешностью $|\delta| < 2.9\%$, а при $h/a > 5$, $|\delta| < 0.4\%$.

Таким образом, методом средних потенциалов получено точное решение для емкости плоскопараллельного кругового конденсатора. Получены асимптотики этого решения.

[1] *Сойбельман Я. С.* Сибирский математический журнал. **26**, №6, С. 167. (1984).
[2] *Йоссель Ю. Я.* Измерение электрической емкости. (Москва: Энергоиздат, 1981).
[3] *Кононов А. П.* Электромеханика. № 3. С. 241. (1966).
[4] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. (М.: Наука, 1968).

Comprehensive analysis of the basic element of the capacitive sensors

M. A. Sivkov[1], **Yu. K. Aleshin**[1,a], **M. A. Choba**[2,b]

[1]*Faculty of Physics, PLomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*
[2]*Faculty of Chemistry, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119191, Russia*
E-mail: [a]*vovur@mail.ru,* [b]*machoba@mail.ru*

PACS: 41.20.Cv

Keywords: electrostatics, electricity intensity, quartz crystal sensor.

Received 27.07.2015

Сведения об авторах

1. Сивков Максим — студент; тел.: (495) 939-30-40.
2. Алешин Юрий Константинович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-30-40, e-mail: vovur@mail.ru.
3. Чоба Мария Алексеевна — канд. хим. наук, старший научный сотрудник, тел.: (495) 939-53-75, e-mail: machoba@mail.ru.