Максимально возможные коэффициенты рассеяния точечной неоднородности для случаев разной размерности

К. В. Дмитриев*
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Рассматривается рассеяние акустических волн на неоднородности фазовой скорости звука и плотности среды, которая имеет малый волновой размер. В одномерном, двумерном и трехмерном случаях получена максимально возможная мощность, рассеянная неоднородностями такого типа.

PACS: 43.20+g УДК: 534.2
Ключевые слова: рассеяние акустических волн, уравнение Липпмана–Швингера, коэффициент рассеяния.

Распространение звука в неоднородной по плотности и сжимаемости среде представляет собой достаточно сложный процесс, сопровождающийся многократным рассеянием в каждой точке неоднородности. Рассеяние может оставаться многократным даже в том случае, когда волновой размер неоднородности мал, или она вообще является квазиточечной. Проявлением данного факта является то, что амплитуда вторичного источника, возникающего при рассеянии звука на неоднородности, взаимосвязана с его фазой и ограничена. Связь фазы и амплитуды вторичного источника была показана в [1] для квазиточечной неоднородности скорости звука, а в [2] обобщается на случай рефракционно–плотностной неоднородности. Эти результаты позволяют получить оценки для максимально возможной мощности, рассеянной на квазиточечной неоднородности, для объектов разной пространственной размерности.

Распространение звука в средах, неоднородных как по фазовой скорости звука $c(\mathbf{z})$, так и по плотности $\rho(\mathbf{z})$, удобно вести на основе системы уравнений гидродинамики для полей акустического давления $p(\mathbf{z})$ и колебательной скорости $\mathbf{v}(\mathbf{z})$. Этот подход был предложен в [3]. В линеаризованном виде, при временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$, упомянутая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\nabla_z \mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) - i\omega\eta(\mathbf{z})p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \phi^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}); \\ &\nabla_z p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) - i\omega\rho(\mathbf{z})\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\phi^{\pm}$ и $\mathbf{f}^{\pm}$ — расположенные в точке $\mathbf{x}$ скалярные и векторные первичные источники поля, соответственно; $\eta \equiv 1/(\rho c^2)$ — сжимаемость среды. Верхним индексом «+» в (1) обозначены величины, относящиеся к запаздывающему, расходящемуся на бесконечности полю, которое удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Верхний индекс «–» относится к опережающему полю, сходящемуся в точку $\mathbf{x}$ из бесконечности и удовлетворяющему комплексно сопряженному условию излучения. Систему уравнений (1) удобно переписать в обозначениях Дирака, вводя вектор-столбцы полевых переменных $|u^{\pm}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{\pm} \\ p^{\pm} \end{pmatrix}$ и первичных источников поля $|F^{\pm}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{\pm} \\ \phi^{\pm} \end{pmatrix}$:

$$\hat{A}(\mathbf{z})\,\big|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\big\rangle = \big|F^{\pm}\big\rangle\,\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $\hat{A}(\mathbf{z}) \equiv \begin{pmatrix} -i\omega\rho(\mathbf{z}) & \nabla_z \\ \nabla_z & -i\omega\eta(\mathbf{z}) \end{pmatrix}$.

Решение системы уравнений (2) может быть выражено через запаздывающую $\hat{G}^{+}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ или опережающую $\hat{G}^{-}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ матричные функции Грина неоднородной среды: $|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\rangle = \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})|F^{\pm}\rangle$. Представляя распределение плотности и сжимаемости в пространстве в виде суммы постоянных положительных фоновых значений ρ_0 и η_0, а также добавок $\rho'(\mathbf{z}) \equiv \rho(\mathbf{z})-\rho_0$ и $\eta'(\mathbf{z}) \equiv \eta(\mathbf{z})-\eta_0$, можно записать матричный аналог уравнения Липпмана-Швингера, куда входят только матричные функции Грина однородной среды $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$:

$$\big|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\big\rangle = \big|u_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\big\rangle + \int_{\Re} \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{A}_1(\mathbf{r})\big|u^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{x})\big\rangle d\mathbf{r}, \tag{3}$$

где $\hat{A}_1(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} i\omega\rho'(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & i\omega\eta'(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$.

Здесь $\big|u_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\big\rangle$ — падающее поле, которое создается первичными источниками $|F^{\pm}\rangle$ в фоновой среде. Интегрирование в (3) осуществляется по всей области расположения неоднородности $\Re$. Интеграл в правой части (3) описывает процессы многократного рассеяния внутри неоднородности. При этом поле $|u^{\pm}\rangle$ входит как в левую, так и в правую часть (3), что затрудняет работу с этим уравнением. Если неоднородность точечная, т. е. $\hat{A}_1(\mathbf{r}) \equiv \hat{\varepsilon}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_0$ — ее радиус-вектор, то можно попытаться ввести в уравнении (3) эффективный матричный коэффициент рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ по правилу $\hat{\varepsilon}|u^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\big|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\big\rangle$, которое позволяет исключить полное неизвестное поле $|u^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\rangle$ в точке $\mathbf{r}_0$. Коэффициенты $\hat{\beta}^{\pm}$ являются матрицами размером $(D+1)\times(D+1)$, где D — размерность задачи. Тогда описание процесса рассеяния можно вести в терминах коэффициентов $\hat{\beta}^{\pm}$:

$$\big|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\big\rangle = \big|u_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\big\rangle + \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\big|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\big\rangle. \tag{4}$$

*E-mail: kdmitrie@aesc.msu.ru

Матричные коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$, в отличие от матрицы $\hat{\varepsilon}$, не являются вполне произвольными и функциональным образом зависят от параметров неоднородности. В [2] показано, что они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\hat{\beta}^{-} - \hat{\beta}^{+} = \hat{\beta}^{-}\hat{C}_D\hat{\beta}^{+}; \\ &\hat{\beta}^{\pm} = -\hat{\sigma}_3 \left\{ \hat{\beta}^{\mp} \right\}^{*} \hat{\sigma}_3, \end{aligned} \tag{5}$$

где матрица $\hat{\sigma}_3$ совпадает с единичной матрицей во всех элементах, кроме правого нижнего, который равен -1. Матрица $\hat{C}_D$ вводится как

$$\hat{C}_D \equiv \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{r}_0} \left(\hat{G}_0^{-}(\mathbf{r}_0, \mathbf{x}) - \hat{G}_0^{+}(\mathbf{r}_0, \mathbf{x}) \right);$$

она определяется размерностью задачи D. В частности,

$$\begin{aligned} \hat{C}_{D=1} &= -\frac{\omega}{k_0} \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 \\ 0 & \rho_0 \end{pmatrix}; \\ \hat{C}_{D=2} &= -\frac{\omega}{4} \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho_0 \end{pmatrix}; \\ \hat{C}_{D=3} &= \frac{k_0\omega}{6\pi} \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\rho_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\eta_0\rho_0}$ — волновое число в фоновой среде.

Введенные таким образом матричные коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ могут описывать рассеяние монопольного и дипольного типа, но не более высоких порядков мультипольности. Это позволяет предположить, что полученные для них соотношения останутся справедливыми не только для точечной неоднородности, но и в более общем случае неоднородности конечного малого волнового размера.

Если распределение параметров неоднородности обладает симметрией по отношению к некоторому геометрическому преобразованию (поворот, центральная или осевая симметрия и т. д.), вид матриц $\hat{\beta}^{\pm}$ может быть упрощен. Пусть такое преобразование задается матрицей $\hat{M}$, которая переводит вектор-столбцы полевых переменных и источников поля из одной системы координат в другую: $|u'^{\pm}\rangle = \hat{M}|u^{\pm}\rangle$, $|F'^{\pm}\rangle = \hat{M}|F^{\pm}\rangle$. Вторичные источники поля, которые порождаются в точке расположения неоднородности падающим полем, можно представить в виде $|F^{\pm}_{\mathrm{sec}}\rangle \equiv \hat{\varepsilon}|u^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\left|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right\rangle$. После преобразования координат они равны, с одной стороны, $\left|F'^{\pm}_{\mathrm{sec}}\right\rangle = \hat{M}|F^{\pm}_{\mathrm{sec}}\rangle = \hat{M}\hat{\beta}^{\pm}\left|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right\rangle$, а с другой стороны, $\left|F'^{\pm}_{\mathrm{sec}}\right\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\left|u'^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\hat{M}\left|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right\rangle$. Здесь используется тот факт, что коэффициенты рассеяния не изменяются при преобразовании в силу предполагаемой симметрии задачи. Поскольку падающее поле $\left|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right\rangle$ может быть произвольным, то равенство двух выше приведенных выражений для $\left|F'^{\pm}_{\mathrm{sec}}\right\rangle$ означает, что матричный коэффициент рассеяния коммутирует с матрицей преобразования:

$$\hat{\beta}^{\pm}\hat{M} = \hat{M}\hat{\beta}^{\pm}. \tag{7}$$

Выражение (7) позволяет заключить, что матричные коэффициенты рассеяния неоднородностей, обладающих сферической ($D = 3$), цилиндрической ($D = 2$) или центральной ($D = 1$) симметрией, имеют диагональный вид и определяются только дипольным $\beta_1^{\pm}$ и монопольным $\beta_0^{\pm}$ скалярными коэффициентами рассеяния:

$$\hat{\beta}^{\pm} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\pm} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_1^{\pm} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_0^{\pm} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Величины $\beta_1^{\pm}$ и $\beta_0^{\pm}$ являются комплексными и могут быть представлены в виде $\beta_0^{\pm} = \pm|\beta_0|\exp(\pm i\psi_0)$ и $\beta_1^{\pm} = \pm|\beta_1|\exp(\pm i\psi_1)$, где ψ_0 и ψ_1 — их фазы, а $|\beta_0|$ и $|\beta_1|$ — амплитуды, соответственно. Данное представление удовлетворяет второму уравнению из системы (5). Из первого уравнения этой системы следует:

$$\begin{aligned} |\beta_0| &= 2\cos\psi_0 \Big/ C_D^{(D+1;D+1)}; \\ |\beta_1| &= 2\cos\psi_1 \Big/ C_D^{(1;1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $C_D^{(m;n)}$ — элемент матрицы C_D с индексами $(m;\,n)$. Таким образом, амплитуды коэффициентов рассеяния неоднородности рассматриваемого типа однозначно связаны с их фазами. Поскольку область значений косинуса ограничена, модуль монопольного и дипольного коэффициентов рассеяния не может превышать $2\Big/\left|C_D^{(D+1;D+1)}\right|$ и $2\Big/\left|C_D^{(1;1)}\right|$, соответственно.

Ограниченность коэффициента рассеяния приводит к тому, что максимально возможная рассеиваемая неоднородностью мощность также ограничена. Согласно (4), падающая на неоднородность плоская монохроматическая запаздывающая волна $\left|u_0^{+}\right\rangle = \left|u_{\mathrm{inc}}^{+}\right\rangle$, интенсивность которой определяется как $I_{\mathrm{inc}}(\mathbf{z}) = \left|p_{\mathrm{inc}}^{+}(\mathbf{z})\right|^2 \Big/ (2\rho_0 c_0)$, порождает рассеянное поле $|u_{\mathrm{sc}}^{+}(\mathbf{z})\rangle \equiv |u^{+}(\mathbf{z})\rangle - \left|u_{\mathrm{inc}}^{+}\right\rangle = \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\left|u_{\mathrm{inc}}^{+}\right\rangle$. Его интенсивность можно определить, вычислив предварительно поле акустического давления p_{sc}^{+}. При разной размерности задачи D оно оказывается равным

$$p^+_{\mathrm{sc},\,D=1}(z) = -\left\{\cos\psi_0 \exp(i\psi_0) + \mathrm{sign}(z-r_0)\cos\psi_1 \exp(i\psi_1)\right\} \exp(ik_0\,|z-r_0|)\,p^+_{\mathrm{inc}};$$

$$p^+_{\mathrm{sc},\,D=2}(\mathbf{z}) = -\left\{\cos\psi_0 \exp(i\psi_0) H_0^{(1)}(k_0\,|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|) + 2i\cos\theta\cos\psi_1 \exp(i\psi_1) H_1^{(1)}(k_0\,|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)\right\}\, p^+_{\mathrm{inc}};$$

$$p^+_{\mathrm{sc},\,D=3}(\mathbf{z}) = \left\{i\cos\psi_0 \exp(i\psi_0) + 3\frac{1-ik_0\,|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}{k_0\,|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\cos\theta\cos\psi_1 \exp(i\psi_1)\right\} \frac{\exp(ik_0\,|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)}{k_0\,|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\, p^+_{\mathrm{inc}}.$$

Здесь θ — угол между волновым вектором падающей волны и вектором $\mathbf{z}-\mathbf{r}_0$, задающим направление на точку приема поля. В одномерном случае он может принимать только значения 0 и π, и поэтому $\cos\theta = \mathrm{sign}(z-r_0)$.

Полную рассеянную неоднородностью мощность акустического поля N_{sc} можно получить, интегрируя его интенсивность $I_{\mathrm{sc}}(\mathbf{z}) = |p^+_{\mathrm{sc}}(\mathbf{z})|^2 \Big/ (2\rho_0 c_0)$ по поверхности $|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \equiv R = \mathrm{const}$ при условии $R\to\infty$. В трехмерном случае это сфера, в двумерном — цилиндр, а в одномерном случае эта операция сводится к суммированию интенсивностей падающей и отраженной волн. В итоге получаются значения

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{sc},\,D=1} &= 2\left(\cos^2\psi_0 + \cos^2\psi_1\right)\ I_{\mathrm{inc}};\\ N_{\mathrm{sc},\,D=2} &= \frac{4}{k_0}\left(\cos^2\psi_0 + 2\cos^2\psi_1\right)\ I_{\mathrm{inc}};\\ N_{\mathrm{sc},\,D=3} &= \frac{4\pi}{k_0^2}\left(\cos^2\psi_0 + 3\cos^2\psi_1\right)\ I_{\mathrm{inc}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Следует отметить, что в двумерном случае такая мощность приходится на единицу длины (в направлении, перпендикулярном рассматриваемой двумерной плоскости), а в одномерном — на единицу площади (перпендикулярной направлению распространения волны), чем объясняется разная размерность N_{sc} в (10). Полученные результаты находятся в соответствии с данными [4], где на основе импедансного метода получен максимально возможный коэффициент рассеяния для сферической неоднородности чисто монопольного типа с малым волновым размером.

Важным следствием (10) является то, что максимально возможная рассеянная мощность не зависит от конкретного значения малого волнового размера неоднородности и остается конечной при стремлении этого размера к нулю.

В заключение нужно отметить, что имеющаяся связь между фазой и амплитудой коэффициента рассеяния может служить дополнительной информацией в задачах томографического типа, поскольку позволяет получить данные об амплитуде принимаемых сигналов на основе данных об их фазовых задержках и наоборот.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00042).

[1] *Буров В. А., Морозов С. А.* Акуст. журн. **47**, №6. С. 751. (2001).
[2] *Дмитриев К. В.* Труды 57-й научной конференции МФТИ с международным участием. Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики. Управление и прикладная математика. **1**. С. 40. (Москва–Долгопрудный–Жуковский: МФТИ. 2014).
[3] *Буров В. А., Дмитриев К. В., Сергеев С. Н* Акуст. журн. **55**, №3. С. 292. (2009).
[4] *Бобровницкий Ю. И.* Акуст. журн. **53**, №1. С. 113. (2007).

The maximum possible refraction coefficients of a point inhomogeneity in the cases of different spatial dimensions

K. V. Dmitriev
Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: kdmitrie@aesc.msu.ru

Acoustical waves scattering on the inhomogeneity of medium density and compressibility is considered in the article. This inhomogeneity has small wave size. The maximum possible scattered by such kind of inhomogeneity power is achieved in 1D, 2D and 3D cases.

PACS: 43.20+g

Keywords: acoustical waves scattering, Lippmann–Schwinger equation, scattering coefficient.

Received 27.07.2015.

Сведения об авторе
Дмитриев Константин Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; тел.: (495) 939-30-81, e-mail: kdmitrie@aesc.msu.ru.