Наклонное распространение интенсивных акустических пучков в жидкости с газовыми пузырьками

В. А. Гусев* А. О. Окунев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Рассмотрено наклонное распространение по отношению к излучающей плоскости акустических пучков большой интенсивности в среде с газовыми пузырьками. Предложена аппроксимация оператора Даламбера, позволяющая вывести эволюционное уравнение, пригодное при любых углах распространения пучка. Сформулировано уравнение типа Хохлова–Заболотской для наклонного распространения пучка в среде с газовыми пузырьками.

PACS: 43.25.+y, 43.30.+m, 47.55.dd УДК: 534.222
Ключевые слова: наклонное распространение, нелинейные акустические пучки, пузырьки газа, придонный волновод.

В работе [1] описан придонный акустический волновод, сформированный неоднородным распределением газовых пузырьков в донном иле, и рассчитано акустическое поле большой интенсивности в нем. Рассмотрено две конфигурации излучателя — излучатель находится в слое или над ним в донной толще. В первом случае требуются дополнительные технические средства для размещения излучателя в слое, однако математическое описание акустического поля можно проводить на основе обычного уравнения Хохлова–Заболотской для интенсивных пучков. Для второй конфигурации приходится рассматривать наклонное падение акустической волны на слой с газовыми пузырьками. Однако в работе [1] для этого случая рассчитано поле только в приближении нелинейной геометрической акустики. Поэтому необходимо вывести адекватные уравнения, описывающие наклонное распространение интенсивных пучков с учетом дифракционных эффектов.

Для описания ограниченных акустических пучков большой интенсивности обычно используются эволюционные уравнения, например уравнение Хохлова–Заболотской, позволяющие упростить математическую модель и построить точные и приближенные аналитические решения. Однако подобные уравнения обычно выводятся при условии распространения, близкого к нормальному по отношению к излучающей плоскости. Предполагается, что волна на начальном этапе распространяется преимущественно по нормали к плоскости, на которой задается граничное условие. При дальнейшем распространении направление может изменяться за счет неоднородности среды.

В данной работе выведено линейное уравнение, учитывающее дифракцию, для случая наклонного распространения акустической волны в среде с пузырьками и предложено обобщение уравнения Хохлова–Заболотской.

Рассмотрим жидкую среду, заполненную газовыми пузырьками. Акустическое поле в такой среде описывается уравнениями (см., например, [1,2]):

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho\nu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial w}{\partial t} + \omega_0^2 w\left(1-\varepsilon_g w\right) = -\omega_0^2\frac{p}{\rho_g c_g^2}. \tag{2}$$

Нелинейное волновое уравнение (1) для акустического давления p учитывает генерацию поля за счет колебаний пузырьков, а уравнение (2) описывает колебания пузырьков, вызванные внешним акустическим полем. Здесь w — относительное изменение объема пузырька, $\omega_0^2 = 3c_g^2\rho_g/\rho R_0^2$ — собственная частота колебаний пузырька с радиусом R_0, ε_g — нелинейный параметр газа внутри пузырька соответственно. Выражая из уравнения (2) переменную p и подставляя в (1), можно записать замкнутое уравнение для функции w:

$$\Delta w - \frac{1}{c_{\text{eff}}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ + \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\delta}{\omega_0^2}\frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon_{\text{g}} w^2\right] = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) формально введена эффективная скорость низкочастотной акустической волны в пузырьковой среде

$$c_{\text{eff}}^2 = \frac{c^2}{1+\beta\nu},$$

где $\beta = \rho c^2/\rho_{\text{g}} c_{\text{g}}^2$ — отношение сжимаемостей жидкой и газовой сред. Параметр β оказывается большой величиной. Используя приближенное соотношение $w \approx -p/\rho_{\text{g}} c_{\text{g}}^2$, следующее из (2) в низкочастотном приближении, можно записать уравнение для акустического давления, аналогичное (3).

В случае нормального распространения уравнение (3) может быть сведено к эволюционному урав-

*E-mail: vgusev@bk.ru

нению типа Хохлова–Заболотской:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\Delta n\left(x,z\right)}{c_{\mathrm{eff}0}}\frac{\partial p}{\partial\tau}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varepsilon}{\rho_{\mathrm{eff}0}c_{\mathrm{eff}0}^{3}}p\frac{\partial p}{\partial\tau}-b\frac{\partial^{2}p}{\partial\tau^{2}}-B\frac{\partial^{3}p}{\partial\tau^{3}}\right)=\frac{c_{\mathrm{eff}0}}{2}\frac{\partial^{2}p}{\partial z^{2}},$$

где

$$\Delta n\left(x,z\right)=\left(c_{\mathrm{eff}0}^{2}/c_{\mathrm{eff}}^{2}-1\right)/2=\beta\left(\nu-\nu_{0}\right)/2\left(1+\beta\nu_{0}\right)$$

— переменная часть показателя преломления, $\rho_{\mathrm{eff}0}=\rho\left(1-\nu_{0}\right)+\rho_{\mathrm{g}}\nu_{0}$, эффективный нелинейный параметр

$$\varepsilon=\frac{1-\left(1-\rho_{\mathrm{g}}/\rho\right)\nu_{0}}{\left(1+\beta\nu_{0}\right)^{2}}\varepsilon_{\mathrm{g}}\beta^{2}\nu_{0},$$

параметр дисперсии B и коэффициент затухания b задаются выражениями:

$$B=\frac{\beta\nu_{0}}{2\omega_{0}^{2}A\sqrt{1+\beta\nu_{0}}},$$
$$b=\frac{\delta\beta\nu_{0}}{\omega_{0}^{2}A\sqrt{1+\beta\nu_{0}}}.$$

При наклонном распространении пучка процедуру вывода эволюционного уравнения необходимо модифицировать. Рассмотрим подробнее оператор Даламбера (волновое уравнение) для давления. Вначале рассмотрим линейную задачу и кратко приведем результаты работы [3] для пояснения возникающих трудностей. Пусть на излучающей плоскости $z=0$ задано граничное условие для давления $p|_{z=0}=p_{0}\left(t;x,y\right)$, где зависимость от поперечных координат x,y описывает структуру волнового пучка. Для того чтобы волна распространялась под углом θ к нормали к излучающей плоскости, нужно ввести линейную по координате временную задержку и задать граничное условие вида

$$p|_{z=0}=p_{0}\left(t-\frac{y}{c}\sin\theta;x,y\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{0}\left(\omega;x,y\right)\exp\left(-i\omega t+i\frac{\omega}{c}y\sin\theta\right),\quad(4)$$

где $S_{0}\left(\omega;x,y\right)$ — временной спектр исходного сигнала. Распространение волны в полупространстве $z>0$ будем описывать линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^{2}p}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}p}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}p}{\partial z^{2}}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}p}{\partial t^{2}}=0,$$

точное решение которого для граничного условия (4) имеет вид

$$p=\frac{1}{4\pi^{2}}\iint_{\infty}S_{0}\left(\omega;x',y'\right)dx'dy'\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\omega t+i\frac{\omega}{c}y'\ \sin\theta\right)d\omega\times$$
$$\times\iint_{\infty}\exp\left(ik_{x}\left(x-x'\right)+ik_{y}\left(y-y'\right)+i\,z\sqrt{k^{2}-k_{x}^{2}-k_{y}^{2}}\right)dk_{x}dk_{y}.\quad(5)$$

Вычислительная сложность состоит в том, что интеграл по пространственным частотам в общем случае точно не вычисляется. Поэтому необходимо прибегать к упрощениям. Одним из часто используемых в теории волн упрощений является переход к рассмотрению квазиплоских ограниченных волновых пучков с узким пространственным спектром. В этом случае продольное волновое число

$$k_{z}=\sqrt{k^{2}-k_{x}^{2}-k_{y}^{2}}\quad(6)$$

можно заменить разложением в ряд Тейлора вблизи направления распространения волны. Акустическое поле, рассчитанное в таком приближении, подчиняется линеаризованному уравнению Хохлова–Заболотской. Аналогичное разложение можно провести и при наклонном распространении вблизи значений $k_{x}=0$, $k_{y}=k\sin\theta$. Соответствующее этому разложению уравнение имеет вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\cos\theta+\frac{\partial p}{\partial y}\sin\theta\right)=\frac{c}{2}\left(\frac{\partial^{2}p}{\partial x^{2}}+\frac{1}{\cos^{2}\theta}\frac{\partial^{2}p}{\partial y^{2}}\right),$$
$$\tau=t-\frac{y}{c}\sin\theta-\frac{z}{c}\cos\theta.$$

Однако справедливость этого уравнения нарушается при увеличении угла θ.

Для формулирования уравнения, применимого при больших значениях угла падения, поставим следующую задачу. Найдем наилучшую аппроксимацию кривой (6) в целом, т. е. кривую, качественно описывающую кривую (6), но, вообще говоря, отличающуюся значениями производных. Рассмотрим возможные варианты аппроксимации дисперсионной кривой (6). Для возможности аналитического расчета необходимо ограничиться параболой, но с неопределенными пока коэффициентами

$$k_z = -\frac{Ak_x^2}{2k} - \frac{Bk_y^2}{2k} + Ck_xk_y + Dk_x + Ek_y + Gk. \quad (7)$$

Здесь сразу положим $C = 0$, чтобы искомая поверхность была параболоидом, и $D = 0$, поскольку в плоскости xz волна распространяется вдоль нормали. Для аппроксимации (7) вычисление интегралов в (5) приводит к выражению

$$p = \frac{1}{2\pi\, cz\sqrt{AB}}\frac{\partial}{\partial\tau}\iint_\infty p_0\left(\tau - \Phi\left(x',\, y'\right); x',\, y'\right) dx'dy',$$
$$\Phi\left(x',\, y'\right) = \frac{1}{2cz}\left[\frac{\left(x-x'\right)^2}{A} + \frac{\left(y-y'-z\left(B\sin\theta+E\right)\right)^2}{B}\right],$$
$$\tau = t - \frac{y}{c}\sin\theta - \frac{z}{c}\left(G - \frac{B\sin^2\theta}{2} - E\sin\theta\right).$$

Это решение удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B\sin\theta - E}{A}\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{B}{A}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right). \quad (8)$$

Наложим следующие условия. Пусть искомая аппроксимация совпадает с точной в направлении распространения волны, а также совпадают вершины точной кривой (6) и искомой аппроксимации (7). Таким выбором обеспечивается также ограниченность коэффициентов уравнения (8) для любых углов распространения.

Наилучший результат обеспечивает следующая аппроксимация

$$k_z = k - \frac{k_x^2}{2k} - \frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{k_y^2}{k}.$$

Этой аппроксимации соответствует эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right). \quad (9)$$

Достоинством этого уравнения является то, что при $\theta = 0$ (нормальное распространение) оно сводится к стандартному линеаризованному уравнению Хохлова–Заболотской, а его коэффициенты при $\theta \to \pi/2$ остаются конечными. Кроме того, оно позволяет снизить требования на узость пространственного спектра пучка.

Таким образом, согласно предложенному методу оператор Даламбера заменяется на оператор уравнения (9). Этот метод может быть использован и для вывода эволюционного уравнения из линеаризованного уравнения (3). Если дисперсия и диссипация малы, то построение аппроксимации проводится аналогичным образом. В результате получим линейное эволюционное уравнение для наклонного распространения пучка:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial y} - b\frac{\partial^2 p}{\partial\tau^2} - B\frac{\partial^3 p}{\partial\tau^3}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right).$$

Отметим, что вид членов, ответственных за дисперсию и диссипацию, согласован с методикой медленно изменяющегося профиля. Легко записать очевидное нелинейное обобщение этого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\mathrm{eff}0}c_{\mathrm{eff}0}^3}p\frac{\partial p}{\partial\tau} - b\frac{\partial^2 p}{\partial\tau^2} - B\frac{\partial^3 p}{\partial\tau^3}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right).$$

Таким образом, в работе выведено нелинейное эволюционное уравнение для наклонного распространения пучков, пригодное при больших отклонениях угла распространения от нормали.

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда № 14-22-00042.

[1] *Гусев В. А., Руденко О. В.* Акуст. журн. **61**, № 2. С. 169. (2015).
[2] *Руденко О. В., Гурбатов С. Н., Хедберг К. М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. (М.: Физматлит, 2007).
[3] *Гусев В. А.* Известия РАН. Серия Физическая. **66**, № 12. С. 1742. (2002).

Oblique propagation of intense acoustic beams in a liquid with gas bubbles

V. A. Gusev[a], **A. O. Okunev**

Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]vgusev@bk.ru

Consider the inclined with respect to the radiating plane propagation of high intensity acoustic beams in the medium with gas bubbles. The approximation of the d'Alembert operator is suggested, which allows us to derive the evolution equation suitable at all angles of beam propagation. The Khokhlov–Zabolotskaya type equation for oblique beam propagation in a medium with gas bubbles is set up.

PACS: 43.25.+y, 43.30.+m, 47.55.dd.

Keywords: oblique propagation, nonlinear acoustic beams, gas bubbles, near-bottom waveguide.

Received 27.07.2015.

Сведения об авторах

1. Гусев Владимир Андреевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; тел.: (495) 939-29-43, e-mail: vgusev@bk.ru.
2. Окунев Антон Олегович — студент; тел.: (495) 939-29-43, e-mail: 1234we@bk.ru.