Квантовый аналог ζ-функции и спектр масс в теории поля, построенной по квантовой знакопеременной ζ-функции

А. О. Шишанин*
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, факультет «Фундаментальные науки», кафедра физики Россия, 105005, Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
(Статья поступила 09.11.2014; подписана в печать 06.07.2015)

Можно рассматривать обобщение математического анализа, в котором производная зависит от некоторого параметра q. Функции, построенные таким образом, называются q-аналогами или квантовыми функциями. В данной статье обсуждается квантовый аналог дзета-функции Римана, а также ее знакопеременная версия. Приводятся формулы представления их в виде функционального ряда и, как следствие, находятся значения в целых отрицательных точках. В классическом пределе $q \to 1$ получаются известные ответы. Впервые рассматривается теория поля с кинетическим членом в виде квантовой знакопеременной дзета-функции и обсуждается для нее спектр масс.

PACS: УДК: 530.14
Ключевые слова: дзета-функция Римана, квантовый анализ, q-аналог, классический предел, спектр масс.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях физики и математики естественно появляется дзета-функция Римана. Она и ее обобщения имеют приложения в теории чисел и алгебраической геометрии [1],[2], функциональном анализе, теории вероятностей [3] и математической статистике [4], динамических системах, квантовой статистике [5], квантовой теории поля [6] и многих других науках. Хотя первым ее серьезно начал исследовать Л. Эйлер, она носит имя Б. Римана. Риман предложил рассматривать дзета-функцию в комплексной области. Он нашел функциональное уравнение, с его помощью построил аналитическое продолжение и сформулировал знаменитую гипотезу о нетривиальных нулях дзета-функции. Имеется много интересных и важных обобщений дзета-функции [1]. Дзета-функция Римана задается следующим рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \tag{1}$$

Если считать s комплексным, то все особенности дзета-функции Римана — это полюс первого порядка при $s = 1$.

Эйлер получил следующую замечательную формулу

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{2}$$

где произведение берется по всем простым числам.

Он вычислил также значения $\zeta(s)$ для четных натуральных чисел

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{950}, \dots$$

А для любого натурального n

$$\zeta(2n) = (-1)^{(n+1)} 2^{2n-1} \pi^{2n} \frac{B_n}{(2n)!}, \tag{3}$$

где B_m числа Бернулли.

Давайте также будем рассматривать знакопеременную дзета-функцию

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \tag{4}$$

Она связана с обычной дзета-фукцией следующим образом

$$\tilde{\zeta}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s). \tag{5}$$

Заметим также, что $\tilde{\zeta}(1) = \ln 2$.

Риман получил следующее функциональное уравнение для $\zeta(s)$

$$\zeta(1-s) = \frac{1}{2^{s-1}\pi^s} \cos\frac{\pi s}{2} \Gamma(s)\zeta(s). \tag{6}$$

Это уравнение можно переписать по другому, если ввести ξ-функцию

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s). \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) запишется так

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{8}$$

Посредством функционального уравнения ζ-функция может быть аналитически продолжена на отрицательные числа. Тогда можно найти ее значения для отрицательных целых чисел

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(-2n) = 0. \tag{9}$$

*E-mail: `guaicura@google.com`

В частности, можно записать

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12},$$

$$\zeta(-2) = 0, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120} \ldots$$

Для $\tilde{\zeta}(s)$ имеем:

$$\tilde{\zeta}(0) = \frac{1}{2}, \quad \tilde{\zeta}(-1) = \frac{1}{4},$$

$$\tilde{\zeta}(-2) = 0, \quad \tilde{\zeta}(-3) = -\frac{1}{8} \ldots$$

Четные отрицательные числа являются тривиальными нулями ζ-функции. Гипотеза Римана утверждает, что ее нетривиальные нули лежат на прямой $s = 1/2$.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ζ-ФУНКЦИЕЙ

Рассмотрим следующий метод обобщения стандартной свободной теории скалярного поля [7]. Похожие модели имеют применение в космологии [8]. Волновое уравнение Клейна–Гордона ($\Box$ — d-мерный оператор д'Аламбера $-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \Delta_{d-1}$)

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0$$

заменим на

$$f(\Box)\phi(x) = 0,$$

где

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Последнее уравнение описывает движение n независимых частиц с массами

$$m_1 = \sqrt{z_1}, \ldots \quad m_n = \sqrt{z_n}.$$

В работе [9] рассматривается теория поля со следующим лагранжианом

$$L = \phi(x)\xi(\frac{1}{2} + i\Box)\phi(x). \tag{10}$$

В [9], используя разложение ξ-функции в бесконечное произведение, показано, что спектр масс этой модели будет определяться нетривиальными нулями ζ-функции Римана.

2. КВАНТОВЫЙ АНАЛИЗ

Квантовый анализ можно определить, по крайней мере, двумя способами [10], [11]. Здесь мы будем рассматривать q-анализ, в котором производная функции имеет вид

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}. \tag{11}$$

Определим q-аналог действительного числа как

$$[n] = n_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{12}$$

и для аналога бесконечности (если $0 < q < 1$) имеем

$$[\infty] = \frac{1}{1 - q}.$$

Обозначим для целого $n > 1$ следующее выражение

$$(x - a)_q^n = (x - a)(x - qa)...(x - q^{n-1}a). \tag{13}$$

Беря это в расчет, можно получить

$$D_q(x - a)_q^n = [n](x - a)_q^{n-1}.$$

Представим q-экспоненты следующими рядами

$$e_q^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{[i]!}, \qquad E_q^x = \sum_{i=0}^{\infty} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{x^i}{[i]!}. \tag{14}$$

Около 1910 г. Ф. Г. Джексон нашел q-аналог интеграла [10], [11]

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1 - q)a \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a). \tag{15}$$

Определим q-гамма и q-бета функции. Хорошо известно, что обычная гамма-функция имеет очень простое функциональное уравнение $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Для ее q-аналога хотелось бы иметь похожее функциональное уравнение. Запишем q-гамма функцию следующим интегралом Джексона

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x. \tag{16}$$

Можно показать, что для нее функциональным уравнением будет

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\Gamma_q(t), \Gamma_q(n+1) = [n]!, \tag{17}$$

а для натуральных чисел n имеем $\Gamma_q(n+1) = [n]!$

Аналогично для q-бета функции, определяемой формулой

$$B_q(t, s) = \int_0^1 x^{t-1}(1 - qx)_q^{s-1} d_q x, \tag{18}$$

получится следующее выражение

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}. \tag{19}$$

Замечательным фактом является то, что эти функции можно записать в виде бесконечных произведений

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty(1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty(1-q^s)_q}, \tag{20}$$

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}. \tag{21}$$

3. q-ДЗЕТА ФУНКЦИЯ

Корректно q-аналог дзета-функции Римана был впервые представлен Канеко, Курокавой и Вакаямой [12]. Давайте рассмотрим следующий ряд

$$\begin{aligned} f_q(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{nt}}{[n]^s} = \frac{q^t}{[1]^s}+\frac{q^2t}{[2]^s}+\frac{q^3t}{[3]^s}+\frac{q^4t}{[4]^s}+\ldots = (1-q)^s\sum_{r=0}^{\infty}C_r^{s+r-1}\frac{q^{t+r}}{1-q^{t+r}} = \\ &= (1-q)^s\left(\frac{q^t}{1-q^t}+s\frac{q^{t+1}}{1-q^{t+1}}+\frac{s(s+1)}{2}\frac{q^{t+2}}{1-q^{t+2}}+\ldots\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Ряды $f_q(s,t)$ имеют полюса первого порядка в точках $t\in Z_{\le 0}+2\pi i Z/\log q$. Вспомним, что дзета-функция Римана имеет только одну особенность, а именно полюс первого порядка в точке $s=1$. Тогда выберем $t=s-1$ и это даст правильный классический предел

$$\zeta_q(s) = f_q(s,s-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(s-1)}}{[n]^s} = \frac{q^{s-1}}{[1]^s}+\frac{q^{2(s-1)}}{[2]^s}+\frac{q^{3(s-1)}}{[3]^s}+\frac{q^{4(s-1)}}{[4]^s}+\ldots \tag{23}$$

Представим также знакопеременную квантовую дзета-функцию

$$\tilde\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{n(s-1)}}{[n]^s} = \frac{q^{s-1}}{[1]^s}-\frac{q^{2(s-1)}}{[2]^s}+\frac{q^{3(s-1)}}{[3]^s}-\frac{q^{4(s-1)}}{[4]^s}+\ldots \tag{24}$$

Тогда формуле (5) будет соответствовать

$$\tilde\zeta_q(s) = \zeta_q(s) - 2\frac{1}{(1+q)^s}\zeta_{q^2}(s). \tag{25}$$

В частности, отсюда видно, что $\tilde\zeta_q(s)$ и $\zeta_q(s)$ будут совпадать при $q=-1$ и $s<0$. Используя (20), можно записать следующие функциональные ряды

$$\zeta_q(s) = (1-q)^s\left(\frac{q^{s-1}}{1-q^{s-1}}+s\frac{q^s}{1-q^s}+\frac{s(s+1)}{2}\frac{q^{s+1}}{1-q^{s+1}}+\ldots\right),$$

$$\tilde\zeta_q(s) = (1-q)^s\left(\frac{q^{s-1}}{1+q^{s-1}}+s\frac{q^s}{1+q^s}+\frac{s(s+1)}{2}\frac{q^{s+1}}{1+q^{s+1}}+\ldots\right).$$

Для натуральных m предельное значение $\lim_{s\to -m}\zeta_q(s)$ существует и дается явно как

$$\zeta_q(-m) = (1-q)^{-m}\left(\sum_{r=0}^{m}(-1)^rC_r^m\frac{1}{q^{m+1-r}-1}+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)\log q}\right). \tag{26}$$

А для $\tilde\zeta_q(s)$ получим

$$\tilde\zeta_q(-m) = (1-q)^{-m}\left(\sum_{r=0}^{m}(-1)^rC_r^m\frac{1}{q^{m+1-r}+1}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим следующие примеры

$$\begin{aligned} \zeta_q(0) &= \frac{1}{1-q}-\frac{1}{\log q}, \\ \zeta_q(-1) &= \frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{q^2-1}-\frac{1}{q-1}+\frac{1}{2\log q}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Предел $q \to 1$ дает классические ответы

$$\lim_{q\to 1}\zeta_q(0) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{q\to 1}\zeta_q(-1) = -\frac{1}{12}.$$

И для знакопеременного случая

$$\tilde{\zeta}_q(0) = \frac{1}{q+1}, \quad \tilde{\zeta}_q(-1) = \frac{q}{(q^2+1)(q+1)}, \qquad (29)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_q(-2) &= \frac{q(q-1)}{(q^3+1)(q^2+1)},\\ \tilde{\zeta}_q(-3) &= \frac{q(q^4-q^3-q^2-q+1)}{(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)},\end{aligned} \qquad (30)$$

$$\tilde{\zeta}_q(-4) = \\ = \frac{q(q-1)(q^2+q+1)(q^4-2q^3-2q+1)}{(q^4-q^3+q^2-q+1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)}. \qquad (31)$$

Эти формулы тоже дают правильный классический предел.

Действительными нулями $\tilde{\zeta}_q(-3)$ являются $q_1 = 0$ и

$$q_{2,3} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{13} \pm \sqrt{2(\sqrt{13}-1)}),$$

а нули $\tilde{\zeta}_q(-4)$ суть $0, 1$ и

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\sqrt[4]{3}).$$

Рассмотрим теперь теорию поля со следующим лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\phi(x)\tilde{\zeta}_{\Box}(s)\phi(x), \qquad (32)$$

где s — отрицательное целое число. Тогда квадраты масс частиц в такой модели будут определяться нулями числителя. Видно, что для всех отрицательных целых чисел s здесь имеется безмассовая частица.

Авторы работы [13] не ожидают для q-аналога дзета-функции Римана ни формулы в виде бесконечного произведения ни функционального уравнения. Это очень правдоподобно, но явного доказательства этого пока нет.

Таким образом, в данной работе получено несколько новых формул (27), (29)–(31) для квантового аналога знакопеременной дзета-функции $\tilde{\zeta}(s)$ и обсужден спектр масс в соответствующей теории поля.

Благодарности

Автор благодарит И. Я. Арефьеву за проявленный интерес к работе, С. Ю. Рыбакова и А. И. Зыкина за обсуждения возможности разложения квантовой дзета-функции в бесконечное произведение, а также А. В. Борисова за просмотр рукописи и замечания.

[1] *Манин Ю. И., Панчишкин Л. Ю.* Введение в современную теорию чисел. (М.: МНЦМО, 2009).
[2] *Вейль А.* Основы теории чисел. (М.: Мир, 1972).
[3] *Ivic A.* The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications. (New York, John Wiley & Sons, 1985).
[4] *Powers D.* Association for Computational Linguistics. P. 151. (1998).
[5] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. (М.: Физматлит, 1995).
[6] *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. (М.: Мир, 1985).
[7] *Pais A., Uhlenbeck G. E.* Phys.Rev. **79**. P. 145. (1950).
[8] *Arkani-Hamed N., Cheng H.-C., Luty M. A, Shinji M.* JHEP. **0405**. P. 074. (2004).
[9] *Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**. P. 881. (2007).
[10] *Кац В. Г., Чен П.* Квантовый анализ. (М.: МНЦМО, 2005).
[11] *Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж.* Специальные функции. (М.: МНЦМО, 2013).
[12] *Kaneko M., Kurokawa N., Wakayama M.* Kyushu Journal of Math. **57**. P. 175. (2003).
[13] *Kawagoe K., Wakayama M., Yamasaki Y.* Forum Math. **1**. P. 1. (2008).

The quantum analog of ζ-function and spector of masses for the alternating ζ-function field theory

A. O. Shishanin

Department of Physics , Faculty of Fundamential Science, N.E.Bauman Moscow State Technical University, Moscow 105005, Russia.
E-mail: guaicura@gmail.com

In the present work we consider the quantum analogue of Riemann's zeta-function and its alternating version. Formulas for representation of zeta-functions in the form of a functional series and values in the negative integral points are given. For classical limit $q \to 1$ are obtained known results. We consider field theory for kinetic term with quantum alternating zeta-function and discuss mass spectrum here.

PACS:

Keywords: the Riemann zeta-function, quantum calculus, q-analogue, classical limit, mass spectrum.

Received 09.11.2014.

Сведения об авторах

Шишанин Андрей Олегович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (499) 614-11-55, e-mail: guaicura@gmail.com.