# Метод комплексного ростка Маслова в квантовой скалярной электродинамике

О. Ю. Шведов*

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,*
*физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля*
*Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 02.06.2015; подписана в печать 22.06.2015)

Рассмотрены основные понятия квазиклассической скалярной электродинамики в различных подходах: при использовании кулоновской калибровки, в алгебраическом подходе, при квантовании по методу Гупта–Блейлера (или BRST–BFV–квантовании). Квазиклассические состояния теории образуют расслоение, базой которого является расширенное фазовое пространство; слои являются пространствами состояний в классическом внешнем поле. Квазиклассические наблюдаемые величины выражаются через дифференциальные 1-формы на расширенном фазовом пространстве.

PACS: 03.65.Sq, 11.15.Kc УДК: 530.145, 514.8

Ключевые слова: асимптотические методы Маслова, квантовая теория поля, квазиклассическое приближение, калибровочные теории

## ВВЕДЕНИЕ

Основным методом квантовой теории поля является теория возмущений: именно в рамках данного подхода доказаны строгие теоремы об устранении расходимостей [1–3]. В то же время, в ряде задач используется и квазиклассическое разложение. В качестве примеров можно привести квантование солитонов [4, 5], квантовую теорию поля во внешнем классическом поле [6] и в искривленном пространстве-времени [7], однопетлевое приближение [8], зависящие от времени приближение Хартри–Фока [8, 9] и гауссовское приближение [10].

Важным вопросом квантовой физики является установление соответствия между квантовой и классической физикой. Поскольку основными объектами квантовой теории являются состояния и наблюдаемые [11], важно понять, какие квантовые состояния могут соответствовать классическим; как в квазиклассическом приближении действуют наблюдаемые величины. Ответы на все эти вопросы в квантовой механике даются в рамках асимптотических методов Маслова [12–14]. Применительно к скалярной теории поля, соответствующий анализ был проведен в работах [15, 16].

В настоящей работе исследуются объекты квазиклассической теории для скалярной квантовой электродинамики. В разделе 2 вводятся обозначения; даются необходимые сведения из теории комплексного ростка Маслова [13, 14] и абстрактной квазиклассической механики, развитой в [17]. Раздел 3 посвящен обзору трех методов построения скалярной квантовой электродинамики: квантования в кулоновской калибровке, алгебраического подхода и метода квантования Гупта–Блейлера (или BRST-BFV квантования). В разделе 4 исследовано, как в каждом из этих подходов можно применить квазиклассические методы. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

## 1. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### A. О методе комплексного ростка Маслова в квантовой физике

Известны различные типы квазиклассических решений уравнений квантовой механики — уравнений с малым параметром $h$ при операторе дифференцирования. Такие уравнения можно записать как

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}, x\right)\psi(x,t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, время $t \in \mathbb{R}$, $\psi(x,t)$ — комплексная функция, $H\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ — функция некоммутирующих операторов, которую можно определить методом вейлевского квантования. В задачах квантовой механики безразмерный малый параметр $h$ при операторе дифференцирования пропорционален постоянной Планка.

Наиболее известным, но не единственным типом приближенного решения уравнения (1) является функция типа ВКБ, зависящая от малого параметра как $\psi(x,t) = \varphi(x,t)e^{\frac{i}{h}S(x,t)}$ с вещественной функцией $S$.

В методе комплексного ростка Маслова [13, 14] рассматриваются другие типы функций, приближенно удовлетворяющих уравнению (1). Простейшее из решений можно записать как

$$\psi(x,t) = h^{-n/4}e^{\frac{i}{h}S(t)}e^{\frac{i}{h}P(t)(x-Q(t))}f\left(\frac{x-Q(t)}{\sqrt{h}}, t\right). \tag{2}$$

Здесь функции $S(t) \in \mathbb{R}$, $P(t) \in \mathbb{R}^n$, $Q(t) \in \mathbb{R}^n$ зависят только от времени $t$, а комплексная функция $f(\xi,t)$ — также от $\xi \in \mathbb{R}^n$; для выражений типа $\sum_{i=1}^n P_i x_i$ использовано обозначение $Px$. Множитель $h^{-n/4}$ обеспечивает соблюдение условия нормировки, согласно кото-

*E-mail: `shvedov@physics.msu.ru`

рому скалярное произведение

$$(\psi,\psi)=\int dx|\psi(x,t)|^2 \tag{3}$$

должно быть порядка $O(1)$.

Если решение типа ВКБ описывает частицу, «размазанную» в каждый момент времени по пространству, то волновая функция (2) метода комплексного ростка Маслова в точке является волновым пакетом, соответствующим частице с импульсом $P(t)$ и координатой $Q(t)$; неопределенность как координаты, так и импульса оказывается порядка $h^{1/2}$.

Поскольку подстановка функции (2) в уравнение (1) приводит к равенству для $f(\xi,t)$ вида

$$\left((-\dot S+P\dot Q)-\sqrt{h}\left(\dot P\xi-\dot Q\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+ih\frac{\partial}{\partial t}\right)f(\xi,t)= \\ =H\left(P-i\sqrt{h}\frac{\partial}{\partial\xi},Q+\sqrt{h}x\right)f(\xi,t),$$

в нулевом порядке по $h$ получим соотношение для функции $S(t)$:

$$-\dot S+P\dot Q=H(P,Q), \tag{4}$$

приравнивание слагаемых порядка $h^{1/2}$ дает систему Гамильтона

$$\dot P=-\frac{\partial H(P,Q)}{\partial Q},\qquad \dot Q=\frac{\partial H(P,Q)}{\partial P}, \tag{5}$$

приравнивание слагаемых порядка $h$ — уравнение Шредингера для $f(\xi,t)$ с квадратичным гамильтонианом

$$i\frac{\partial}{\partial t}f(\xi,t)=\frac{1}{2}\left[\hat\pi\frac{\partial^2 H}{\partial P\partial P}\hat\pi+\hat\xi\frac{\partial^2 H}{\partial Q\partial P}\hat\pi+ \right. \\ \left. +\hat\pi\frac{\partial^2 H}{\partial P\partial Q}\hat\xi+\hat\xi\frac{\partial^2 H}{\partial Q\partial Q}\hat\xi\right]f(\xi,t), \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\hat\xi_j=\xi_j,\qquad \hat\pi_j=-i\frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

При выполнении соотношений (4), (5), (6) уравнение (1) выполнено с точностью $O(h^{3/2})$, что является достаточным условием того, что построенное асимптотическое решение (2) уравнения (1) приближенно совпадает с точным решением задачи Коши для этого уравнения при соответствующем начальном условии.

Другие типы квазиклассических решений уравнения (1) могут быть построены [18] из простейших решений (2) с помощью суперпозиции

$$\psi(x,t)=\int\frac{d^k\alpha}{h^{k/4}}h^{-n/4}e^{\frac{i}{h}S(\alpha,t)}e^{\frac{i}{h}P(\alpha,t)(x-Q(\alpha,t))}\times \\ \times f\left(\frac{x-Q(\alpha,t)}{\sqrt{h}},\alpha,t\right). \tag{7}$$

Здесь $\alpha$ — $k$-мерный параметр. В частности, при $k=n$ суперпозиция (7) дает решение типа ВКБ. При этом не возникает трудности, связанной с тем, что в методе ВКБ функция $S(x,t)$, являющаяся решением уравнения Гамильтона-Якоби, необязательно однозначно определена для всех $t$.

Следует отметить, что скалярное произведение (3) функций (7) не является экспоненциально малым, только если выполнено условие изотропности

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_a}=P\frac{\partial Q}{\partial\alpha_a}. \tag{8}$$

При соблюдении условия (8) скалярное произведение (3) в главном порядке по $h$ выражается через дельта-функции от коммутирующих друг с другом ввиду свойства (8) операторов $\frac{\partial P}{\partial\alpha_a}\xi-\frac{\partial Q}{\partial\alpha_a}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}$: при $a=1,..,k$:

$$(\psi,\psi)=\int d^k\alpha\int d^n\xi f^*\prod_a\left(2\pi\delta\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha_a}\xi-\frac{\partial Q}{\partial\alpha_a}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right)f. \tag{9}$$

### B. О квантовополевых обозначениях

Принятые в квантовой теории поля обозначения отличаются от квантовомеханических множителем $\sqrt{h}$: в уравнении (1) следует сделать замену $x=\sqrt{h}q$:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{h}H\left(-i\sqrt{h}\frac{\partial}{\partial q},\sqrt{h}q\right)\psi. \tag{10}$$

При такой замене приближенное решение (2) с учетом условия нормировки принимает вид:

$$\psi(x,t)=e^{\frac{i}{h}S(t)}e^{\frac{i}{h}P(t)(q\sqrt{h}-Q(t))}f\left(q-\frac{Q(t)}{\sqrt{h}},t\right). \tag{11}$$

Используя операторные тождества, приведем функцию (11) к виду

$$\psi(x,t)=e^{\frac{i}{h}\tilde S(t)}e^{\frac{i}{\sqrt{h}}(P(t)q-Q(t)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q})}f\left(q,t\right). \tag{12}$$

при

$$\tilde S(t)=S(t)-\frac{1}{2}P(t)Q(t).$$

Запись (12) позволяет строить приближенные решения уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=\frac{1}{h}H\left(\sqrt{h}\hat p,\sqrt{h}\hat q\right)\psi(t). \tag{13}$$

для элемента $\psi(t)$ абстрактного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ без выбора конкретного представления операторов $\hat p_j$ и $\hat q_j$, $j=1,..,k$. Необязательно задавать эти операторы явно как $\hat p_j=-i\partial/\partial q_j$ и $\hat q_j=q_j$ — можно ограничиться использованием коммутационных соотношений

$$[\hat p_j,\hat p_s]=0,\qquad [\hat q_j,\hat q_s]=0,\qquad [\hat p_j,\hat q_s]=-i\delta_{js}.$$

Приближенное решение уравнения (13) можно записать как

$$\psi(t) = e^{\frac{i}{h}\tilde{S}(t)} e^{\frac{i}{\sqrt{h}}(P(t)\hat{q}-Q(t)\hat{p})} f\,(t)\,,$$

где $f(t)$ — имеющий предел при $h \to 0$ элемент $\mathcal{H}$.

При использовании метода комплексного ростка Маслова в квантовой теории поля рассматриваются уравнения, зависящие от малого параметра $h$ как

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \frac{1}{h} H\left(\sqrt{h}\hat{\pi}(\cdot), \sqrt{h}\hat{\varphi}(\cdot)\right)\Psi(t). \qquad (14)$$

Здесь $\Psi(t)$ — элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ — операторы поля в $n$-мерном пространстве ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ — операторы канонически сопряженных импульсов. Предполагается выполнение коммутационных соотношений

$$\left[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{pi}(\mathbf{y})\right] = 0, \qquad [\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{y})] = 0,$$
$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Приближенное решение уравнения (14) можно строить с использованием операторной записи

$$\Psi(t) = e^{\frac{i}{h}\tilde{S}(t)} e^{\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}(\Pi(\mathbf{x},t)\hat{\varphi}(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{x},t)\hat{\pi}(\mathbf{x}))} f\,(t)\,,$$

Также можно выбрать конкретное представление для операторов поля и импульса: считая $\Psi$ функционалом $\Psi[\varphi(\cdot), t]$, запишем операторы как

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \qquad \hat{\pi}(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})};$$

тогда приближенное решение будет иметь вид

$$\Psi(\varphi(\cdot), t) = e^{\frac{i}{h}S(t)} e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}(\Pi(\mathbf{x},t)(\sqrt{h}\hat{\varphi}(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{x},t))}\times$$
$$\times f\left(\varphi(\cdot) - \frac{\Phi(\cdot)}{\sqrt{h}}, t\right).$$

### C. Какие свойства квазиклассических состояний являются существенными?

**1.** Квазиклассические состояния (2) в каждый момент времени характеризуются следующими параметрами: «классическими» переменными $X = (S \in \mathbb{R}; P \in \mathbb{R}^n; Q \in \mathbb{R}^n)$ и «квантовой» функцией $f(\xi)$. Совокупность всех квазиклассических состояний образует поэтому структуру *квазиклассического расслоения*: базой $\mathcal{X}$ является расширенное $(2n+1)$-мерное фазовое пространство (элементы имеют вид совокупностей $X = (S; P; Q)$), слоями $\mathcal{F}_X$ — пространства функций $f(\xi)$ со скалярным произведением $(f, f) = \int d\xi |f(\xi)|^2$.

Если обозначить через $K^h_X$ оператор из $\mathcal{F}_X$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ вида

$$(K^h_X f)(x) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}S} e^{\frac{i}{h}P(x-Q)} f\left(\frac{x-Q(t)}{\sqrt{h}}\right),$$

то волновую функцию (2) в момент времени $t$ можно записать как

$$\psi(t) = K^h_{X(t)} f(t), \qquad (15)$$

а суперпозицию (7) — как

$$\psi(t) = \int \frac{d^k\alpha}{h^{k/4}} K^h_{X(\alpha,t)} f(\alpha, t). \qquad (16)$$

**2.** Подстановка волновой функции (2) в уравнение Шредингера (1) была основана на правиле коммутации оператора $K^h_X$ с оператором дифференцирования по параметру $ih\partial/\partial t$ и с оператором квантовой наблюдаемой $\hat{H}$. Первое из правил коммутации можно записать как

$$ih\frac{\partial}{\partial t}K^h_{X(t)} = K^h_{X(t)}\left(\omega_X[dX/dt] - \sqrt{h}\Omega_X[dX/dt] + \right.$$
$$\left. + ih\frac{\partial}{\partial t} + h\Delta + \ldots\right). \quad (17)$$

Здесь $\omega$ — числовая дифференциальная 1-форма на многообразии $\mathcal{X}$, $\Omega$ — операторнозначная дифференциальная 1-форма на этом многообразии. В случае квантовой механики эти структуры имеют вид

$$\omega_X[\delta X] = P\delta Q - \delta S, \qquad \Omega_X[\delta X] = \delta P\hat{\xi} - \delta Q\hat{\pi},$$

а оператор $\Delta$ равен нулю.

Правило коммутации квазиклассической наблюдаемой величины $\hat{H}$ с оператором $K^h_X$ можно записать как

$$\hat{H}K^h_{X(t)} = K^h_{X(t)}\left(H(X) + \sqrt{h}\Xi H(X) + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2}\Xi^2 H(X) + \ldots\right). \quad (18)$$

Здесь $\Xi H(X)$, $\Xi^2 H(X), \ldots$ — некоторые операторы в $\mathcal{F}_X$. В случае квантовой механики они определяются из соотношения

$$H(P+\sqrt{h}\hat{\pi}, Q+\sqrt{h}\hat{\xi}) = H(P,Q) + \sqrt{h}\Xi H(P,Q) +$$
$$+ \frac{h}{2}\Xi^2 H(P,Q) + \ldots$$

и имеют вид

$$\Xi H = \frac{\partial H}{\partial P}\hat{\pi} + \frac{\partial H}{\partial Q}\hat{\xi},$$
$$\Xi^2 H = \hat{\pi}\frac{\partial^2 H}{\partial P\partial P}\hat{\pi} + \hat{\xi}\frac{\partial^2 H}{\partial Q\partial P}\hat{\pi} + \hat{\pi}\frac{\partial^2 H}{\partial P\partial Q}\hat{\xi} + \hat{\xi}\frac{\partial^2 H}{\partial Q\partial Q}\hat{\xi}.$$

**3.** Многие свойства структур квазиклассической механики (1-форм $\omega$ и $\Omega$, операторов $\Xi H$) можно получить на основе соотношений (17) и (18) [17].

**Предложение 1** *1. Пусть $X(\alpha_1,\alpha_2)$ — функция со значениями на $\mathcal{X}$. Тогда*

$$\left[\Omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_1}\right],\Omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_1}\right]\right]= \\ =-i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_1}\right]\right). \quad (19)$$

*2. Пусть $X(\alpha)$ — функция со значениями на $\mathcal{X}$. Тогда*

$$\left[\Omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right],\Xi H(X)\right]=i\frac{\partial}{\partial\alpha}H(X(\alpha)). \quad (20)$$

**Доказательство**. Первое утверждение является следствием свойства коммутативности операторов дифференцирования $ih\partial/\partial\alpha_1$ и $ih\partial/\partial\alpha_2$:

$$0=\left[ih\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\ ih\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right]K^h_{X(\alpha)}= \\ =K^h_{X(\alpha)}\left[\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_1}\right]-\sqrt{h}\Omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_1}\right]+ih\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\ldots,\right. \\ \left.\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_2}\right]-\sqrt{h}\Omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_2}\right]+ih\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+\ldots\right];$$

вычисление коммутатора в правой части и приравнивание его нулю в главном порядке по $h$ дает свойство (19).

Второе утверждение является следствием коммутативности операторов $ih\partial/\partial\alpha$ и $\hat{H}$:

$$0=\left[ih\frac{\partial}{\partial\alpha},\ \hat{H}\right]K^h_{X(\alpha)}= \\ =K^h_{X(\alpha)}\left[\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right]-\sqrt{h}\Omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right]+ih\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,\right. \\ \left.H(X)+\sqrt{h}\Xi H(X)+\frac{h}{2}\Xi^2H(X)+\ldots\right];$$

вычисление коммутатора в правой части и приравнивание его нулю в главном порядке по $h$ дает свойство (20). Тем самым оба утверждения доказаны.

Если воспользоваться определением дифференциала 1-формы

$$d\omega_X\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha_1},\frac{\partial X}{\partial\alpha_2}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\omega_X\left[\frac{\partial X}{\partial\alpha_1}\right]$$

и обозначить $\delta_1X=\partial X/\partial\alpha_1$ и $\delta_2X=\partial X/\partial\alpha_2$, соотношение (19) упростится:

$$[\Omega_X[\delta_1X],\Omega_X[\delta_2X]]=-id\omega_X(\delta_1X,\delta_2X). \quad (21)$$

Отметим, что в случае квантовой механики

$$d\omega_X(\delta_1X,\delta_2X)=\delta_1P\delta_2Q-\delta_2P\delta_1Q.$$

Если воспользоваться определением 1-формы $dH$

$$dH_X[\partial X/\partial\alpha]=\frac{\partial}{\partial\alpha}H(X(\alpha))$$

и обозначить $\delta X=\partial X/\partial\alpha$, соотношение (20) запишется в виде

$$[\Omega_X[\delta X],\Xi H(X)]=idH_X[\delta X]. \quad (22)$$

**4.** При подстановке волновой функции (15) в уравнение

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi,$$

использовании коммутационных соотношений (17) и (18) и приравнивании слагаемых различных порядков по $h$ приходим к следующим уравнениям:

$$\omega_X[dX/dt]=H(X); \quad (23)$$

$$\Omega_X[dX/dt]=-\Xi H(X); \quad (24)$$

$$i\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\frac{1}{2}\Xi^2H(X)-\Delta\right)f. \quad (25)$$

В случае квантовой механики уравнения (23), (24), (25) имеют вид (4), (5), (6) соответственно.

Коммутируя соотношение (24) с оператором $\Omega_X[\delta X]$, приходим к уравнению

$$d\omega_X(\delta X,dX/dt)=dH_X[\delta X]. \quad (26)$$

В случае квантовой механики соотношения (26) и (23) переходят в уравнения (4), (5), определяющие эволюцию на расширенном фазовом пространстве.

**5.** Рассмотрим более сложных решений (16) уравнения Шредингера. Оказывается, что скалярное произведение $(\psi,\psi)$ выражается только через уже введенные конструкции $\omega$ и $\Omega$: это скалярное произведение не является экспоненциально малым, только если выполнено условие изотропности

$$\omega_X[\partial X/\partial\alpha_a]=0;$$

при этом

$$(\psi,\psi)=\int d^k\alpha\int d^n\xi\left(f,\prod_{a=1}^{k}\left(2\pi\delta\left(\Omega[\partial X/\partial\alpha_a]\right)\right)f\right).$$

**6.** Таким образом, при анализе квазиклассической механики системы введен ряд структур.

Квазиклассическое состояние (15) можно рассматривать как совокупность $(X;f)$ классического состояния $X$ (элемента расширенного фазового пространства $\mathcal{X}$) и квантового состояния $f$ во внешнем поле $X$: $f$ принадлежит пространству $\mathcal{F}_X$. Совокупность всех квазиклассических состояний типа (15) образует расслоение с базой $\mathcal{X}$ и слоями $\mathcal{F}_X$.

На расширенном фазовом пространстве $\mathcal{X}$ на основе свойства (17) введены дифференциальная 1-форма $\omega$, сопоставляющая каждому касательному вектору $\delta X$

число $\omega_X[\delta X]$, и операторнозначная дифференциальная 1-форма $\Omega$, сопоставляющая $\delta X$ оператор $\Omega_X[\delta X]$, действующий в $\mathcal{F}_X$. Дифференциальные 1-формы играют важную роль при исследовании более сложных квазиклассических состояний (16).

При действии на квазиклассическое состояние (15) оператор физической величины $H$ в нулевом приближении является оператором умножения на число $H(X)$ (классической наблюдаемой), а в первом приближении содержит также операторную поправку $\Xi H(X)$ (см. (18)).

Многие соотношения квазиклассической механики представлены через введенные структуры: выполнены коммутационные соотношения (21) и (22); уравнения классической эволюции имеют вид (23) и (26).

Исследуем, какой вид имеют указанные структуры в квазиклассической скалярной электродинамике. Рассмотрим сначала различные способы построения квантовой скалярной электродинамики.

## 2. КВАНТОВАЯ СКАЛЯРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ

Скалярная электродинамика является теорией комплексного скалярного поля $\theta$ массы $m$, взаимодействующего с электромагнитным полем с векторным потенциалом $A^\mu$. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = D_\mu\theta^* D^\mu\theta - m^2\theta^*\theta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{h}V(h\theta^*\theta). \quad (27)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля, $D_\mu = \partial_\mu - i\sqrt{h}A_\mu$ — ковариантная производная скалярного поля (электрический заряд обозначен через $\sqrt{h}$), $V$ — потенциал самодействия скалярного поля.

Известно несколько формулировок квантовой скалярной электродинамики. Обсудим их.

### A. Гамильтониан и связи по Дираку

Чтобы перейти от плотности лагранжиана (27) к гамильтониану, найдем обобщенные импульсы, соответствующие полям модели:

$$E_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu} = F_{\mu 0}, \qquad \pi_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}^*} = D_0\theta,$$
$$\pi_\theta^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = D_0\theta^*.$$

Отметим, что $E_0 = 0$. Энергия

$$H = \int d\mathbf{x}[E_\mu\dot{A}^\mu + \pi_\theta\dot{\theta}^* + \pi_\theta^*\dot{\theta} - \mathcal{L}],$$

выраженная через поля и обобщенные импульсы, имеет вид

$$H = \int d\mathbf{x}[\mathcal{H}(\mathbf{x}) + A_0(\mathbf{x})\Lambda_\mathbf{x}]$$

с плотностью гамильтониана

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}E_kE_k + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \pi_\theta^*\pi_\theta + D_i\theta^*D_i\theta + m^2\theta^*\theta + \frac{1}{h}V(h\theta^*\theta) \quad (28)$$

и связями

$$\Lambda_\mathbf{x} = \partial_kE_k + i\sqrt{h}(\pi_\theta^*\theta - \pi_\theta\theta^*). \quad (29)$$

Нулевая компонента векторного потенциала является при этом множителем Лагранжа.

Если в качестве квантовых состояний системы рассматривать функционалы $\Psi[A^k(\cdot), \theta(\cdot), \theta^*(\cdot)]$, квантовые поля $(\hat{A}^k(\mathbf{x}), \hat{\theta}(\mathbf{x}), \hat{\theta}^*(\cdot))$ будут являться операторами умножения на $A^k(\mathbf{x})$, $\theta(\mathbf{x})$ и $\theta^*(\mathbf{x})$, а обобщенные импульсы $(\hat{E}_k(\mathbf{x}), \hat{\pi}_\theta(\mathbf{x}), \hat{\pi}_\theta^*(\mathbf{x}))$ — операторами дифференцирования

$$\hat{E}_k = -i\frac{\delta}{\delta A^k(\mathbf{x})}, \qquad \hat{\pi}_\theta(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\theta^*(\mathbf{x})},$$
$$\hat{\pi}_\theta^*(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\theta(\mathbf{x})}. \quad (30)$$

Квантовый гамильтониан получается из классического выражения заменой классических полей на квантовые:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x}\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}), \quad (31)$$

а уравнение эволюции имеет вид

$$i\dot{\Psi}^t = \hat{H}\Psi^t. \quad (32)$$

В методе квантования по Дираку [19] физические состояния $\Psi_D^t$ удовлетворяют не только уравнению (32), но и дополнительным условиям

$$\hat{\Lambda}_\mathbf{x}\Psi_D^t = 0. \quad (33)$$

Операторы $\hat{\Lambda}_\mathbf{x}$ являются квантовыми связями (29)

$$\hat{\Lambda}_\mathbf{x} = \partial_k\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^k(\mathbf{x})} + \sqrt{h}\left(\theta(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\theta(\mathbf{x})} - \theta^*(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\theta^*(\mathbf{x})}\right). \quad (34)$$

Поскольку

$$[\hat{\Lambda}_\mathbf{x}; \hat{H}] = 0, \quad (35)$$

условия связей (33) сохраняются при эволюции. Остается открытым вопрос о скалярном произведении волновых функционалов.

### B. Кулоновская калибровка

Представим поле $A^k(\mathbf{x})$, являющееся аргументом волнового функционала $\Psi$, в виде суммы поперечной и продольной составляющей. Обозначая

$$A_\perp^k(\mathbf{x}) = (\delta_{kl} - \frac{\partial_k\partial_l}{\partial^2})A^l(\mathbf{x}), \quad (36)$$

запишем

$$A^k(\mathbf{x}) = (\delta_{kl} - \frac{\partial_k\partial_l}{\partial^2})A^l_\perp(\mathbf{x}) + \partial_k\gamma(\mathbf{x}),$$
$$\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{\partial^2}\partial_l A^l(\mathbf{x}). \tag{37}$$

Выразим волновой функционал через продольную и поперечную составляющие векторного потенциала:

$$\Psi_D = \Psi_D[A^k_\perp, \gamma, \theta, \theta^*].$$

Тогда

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^k(\mathbf{x})} = \left(\delta_{kl} - \frac{\partial_k\partial_l}{\partial^2}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^l_\perp(\mathbf{x})} - \frac{1}{\partial^2}\partial_l\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\gamma(\mathbf{x})},$$

и условие связи (33) принимает вид

$$\left[\frac{\delta}{\delta\gamma(\mathbf{x})} + i\sqrt{h}\left(\theta(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\theta(\mathbf{x})} - \theta^*(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\theta^*(\mathbf{x})}\right)\right]\Psi_D = 0. \tag{38}$$

Соотношение (38) позволяет восстановить функционал $\Psi_D[\gamma, A^k_\perp, \theta, \theta^*]$ по его значениям на поверхности $\gamma = 0$. Следовательно, можно задавать функционал $\Psi_D$ только на этой поверхности, то есть при условии

$$\partial_k A^k(\mathbf{x}) = 0. \tag{39}$$

Приходим, таким образом, к формулировке квантовой скалярной электродинамики в кулоновской калибровке (39): состояние системы описывается с помощью функционала

$$\Psi_C[A^k_\perp, \theta, \theta^*] = \Psi_D[0, A^k_\perp, \theta, \theta^*],$$

оператор поля $\hat{A}^k(\mathbf{x})$ рассматривается как оператор умножения на $A^k_\perp(\mathbf{x})$, оператор канонически сопряженного импульса — как

$$\hat{E}^{(C)}_k = \left(\delta_{kl} - \frac{\partial_k\partial_l}{\partial^2}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^l_\perp(\mathbf{x})} -$$
$$- \sqrt{h}\frac{1}{\partial^2}\partial_k\left(\theta(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\theta(\mathbf{x})} - \theta^*(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\theta^*(\mathbf{x})}\right); \tag{40}$$

скалярное произведение имеет вид

$$\langle\Psi_C, \Psi_C\rangle_C = \int DA_\perp D\theta^* D\theta |\Psi_C[A^k_\perp, \theta, \theta^*]|^2. \tag{41}$$

Плотность гамильтониана имеет вид (28).

Подчеркнем, что квантование электромагнитного поля в кулоновской калибровке дополняет подход Дирака выбором конкретного скалярного произведения.

### C. Алгебраический подход

Еще один способ введения скалярного произведения для систем со связями — использовать алгебраический подход (refined algebraic quantization) [20]. Вместо использования условий связи (33), будем считать состояния системы произвольными функционалами $\Psi_A[A^k, \theta, \theta^*]$, но модифицируем их скалярное произведение [21]:

$$\langle\Psi_A, \Psi_A\rangle = (\Psi_A, \prod_{\mathbf{x}}\delta(\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}})\Psi_A) =$$
$$= \int DAD\theta D\theta^*(\Psi_A[A^k, \theta, \theta^*])^* \prod_{\mathbf{x}}\delta(\Lambda_{\mathbf{x}})\Psi_A[A^k, \theta, \theta^*]. \tag{42}$$

Как вытекает из соотношения (35), скалярное произведения (42) инвариантно относительно эволюции.

Отметим, что скалярное произведение (42) является вырожденным. Например, состояния вида

$$\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}Y; \qquad (\exp(\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}) - 1)Y \tag{43}$$

имеют нулевую норму. Следовательно, следует ввести отношение эквивалентности: объявить два состояния $\Psi_A$ и $\Psi'_A$ эквивалентными, если их разность имеет нулевую норму

$$\Psi_A \sim \Psi'_A \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle\Psi_A - \Psi'_A, \Psi_A - \Psi'_A\rangle = 0.$$

Соответствующее факторпространство рассматривается как пространство физических состояний. В частности, квантовые состояния

$$\Psi_A \sim \exp(-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}})\Psi_A \tag{44}$$

следует рассматривать как калибровочно эквивалентные.

**Предложение 2** *Оператор вида*

$$\exp(-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}})$$

*переводит функционал $\Psi_A$ в функционал вида*

$$(e^{-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}}\Psi_A)[A^k, \theta, \theta^*] =$$
$$= \Psi_A[A^k + \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_k\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}].$$

**Доказательство**. Рассмотрим функционал вида

$$\Psi^\tau_A[A^k, \theta, \theta^*] = (e^{-\frac{i\tau}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}}\Psi_A)[A^k, \theta, \theta^*],$$

который удовлетворяет уравнению

$$i\sqrt{h}\frac{\partial\Psi^\tau_A}{\partial\tau} = \int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}\Psi^\tau_A$$

и начальному условию

$$\Psi^0_A = \Psi_A.$$

Подбирая решение задачи Коши, получим:

$$\Psi_A^\tau[A^k,\theta,\theta^*] = \Psi_A[A^k + \frac{\tau}{\sqrt{h}}\partial_k\alpha, \theta e^{-i\tau\alpha}, \theta^* e^{i\tau\alpha}],$$

что доказывает предложение.

Учитывая, что

$$\prod_{\mathbf{x}} \delta(\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}) = \int D\alpha \exp[-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}], \qquad (45)$$

для скалярного произведения (42) запишем:

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DAD\theta^* D\theta D\alpha \Psi_A^*[A^k,\theta,\theta^*]\times \times \Psi_A[A^k + \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_k\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}]. \qquad (46)$$

Соответствие между состояниями в подходе Дирака и в алгебраическом подходе оказывается следующим (см. [22]):

$$\Psi_D = \prod_{\mathbf{x}} \delta(\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}})\Psi_A. \qquad (47)$$

Отметим, что соотношение (33) для дираковского состояния выполняется автоматически; эквивалентным функционалам $\Psi_A$ при этом соответствует одно и то же дираковское состояние. Учитывая свойство (45), с учетом предложения 2 получим:

$$\Psi_D[A^k,\theta,\theta^*] = \int D\alpha\Psi_A[A^k + \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_k\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}]. \qquad (48)$$

**Предложение 3** *Скалярное произведение в алгебраическом подходе* (46) *согласуется со скалярным произведением* (41) *в кулоновской калибровке.*

**Доказательство**. Выделим продольные и поперечные составляющие поля $A^k(\mathbf{x})$ согласно (37) и рассмотрим функционал $\Psi_D[A_\perp^k,\gamma,\theta,\theta^*]$:

$$\Psi_D[A_\perp^k,\gamma,\theta,\theta^*] = \int D\alpha\Psi_A[A_\perp^k, \gamma + \frac{1}{\sqrt{h}}\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}].$$

Волновой функционал в кулоновской калибровке запишется как

$$\Psi_C[A_\perp^k,\theta,\theta^*] = \Psi_D[A_\perp^k,0,\theta,\theta^*] = = \int D\alpha\Psi_A[A_\perp^k, \frac{1}{\sqrt{h}}\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}].$$

Скалярное произведение в алгебраическом подходе

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DA_\perp D\gamma D\theta^* D\theta D\alpha\times \times \Psi_A^*[A_\perp^k,\gamma,\theta^*,\theta]\Psi_A[A_\perp^k, \gamma + \frac{1}{\sqrt{h}}\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}].$$

заменой переменной $\gamma = \beta/\sqrt{h}$, $\alpha = \sigma - \beta$, $\theta = \tilde{\theta}e^{-i\beta}$, $\theta^* = \tilde{\theta}^* e^{+i\beta}$ приводится к виду

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DA_\perp D\beta D\tilde{\theta}^* D\tilde{\theta} D\sigma\times \times\Psi_A^*[A_\perp^k, \frac{\beta}{\sqrt{h}}, \tilde{\theta}e^{-i\beta}, \tilde{\theta}^* e^{+i\beta}]\Psi_A[A_\perp^k, \frac{\sigma}{\sqrt{h}}, \tilde{\theta}e^{-i\sigma}, \tilde{\theta}^* e^{+i\sigma}],$$

или к виду скалярного произведения в кулоновской калибровке (41).

### D. Квантовая электродинамика в подходе Гупта–Блейлера

Явно ковариантный подход к квантованию свободной электродинамики (квантование в калибровке Лоренца) был предложен в работах Гупта и Блейлера [23]. В дальнейшем на основе данного подхода был развит метод BRST-BFV квантования (Бекки–Рюэ–Стора–Тютина–Баталина–Фрадкина–Вилковысского) [24, 25], применимый как к электродинамике, так и к неабелевым калибровочным теориям. Для скалярной электродинамики состояния в данном методе квантования рассматриваются (см., например, [26]) как функционалы от скалярных полей и от 4-векторного потенциала:

$$\Psi_L[A^0(\cdot), A^k(\cdot), \theta(\cdot), \theta^*(\cdot)]. \qquad (49)$$

Вводится скалярное произведение функционалов, не являющееся положительно определенным:

$$\langle\Psi_L,\Psi_L\rangle_L = = \int DA^k D\lambda D\theta D\theta^* (\Psi_L[-i\lambda(\cdot), A^k(\cdot), \theta(\cdot), \theta^*(\cdot)])^* \times \times \Psi_L[i\lambda(\cdot), A^k(\cdot), \theta(\cdot), \theta^*(\cdot)]. \qquad (50)$$

Выделяются физические состояния — функционалы, удовлетворяющие дополнительному условию Гупта–Блейлера:

$$\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})} - \frac{i}{\sqrt{-\Delta}}\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}\right]\Psi_L = 0. \qquad (51)$$

При этом состояния вида

$$\Psi_L \sim \Psi_L + \int d\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})} + \frac{i}{\sqrt{-\Delta}}\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}]Y_L \qquad (52)$$

считаются эквивалентными, поскольку функционал вида $\int d\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})} + \frac{i}{\sqrt{-\Delta}}\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}]Y_L$ ортогонален всем физическим состояниям.

Учитывая, что в алгебраическом подходе квантовые состояния определены с точностью до отношения калибровочной эквивалентности, можно по-разному сопоставить состоянию в подходе Гупта–Блейлера состояние в алгебраическом подходе.

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$ — некоторая фиксированная полевая конфигурация. Положим:

$$\Psi_A[A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)] = \Psi_L[A^k(\cdot),\mathcal{A}^0(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)]. \quad (53)$$

**Предложение 4** *1. При любой полевой конфигурации* $\overline{\mathcal{A}^0}(\mathbf{x})$ *волновой функционал*

$$\overline{\Psi}_A[A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)] = \Psi_L[A^k(\cdot),\overline{\mathcal{A}^0}(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)]$$

*калибровочно эквивалентен функционалу* (53).

*2. Скалярное произведение в подходе Гупта–Блейлера согласуется со скалярным произведением в алгебраическом подходе.*

**Доказательство**. Представим условие (51) как

$$\Psi_L[A^k(\cdot),A^0(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)] = \\ = \exp\left[-\int d\mathbf{x}(A^0(\mathbf{x})-\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}\right]\times \\ \times\Psi_A[A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)]. \quad (54)$$

Отсюда при $A^0=\overline{\mathcal{A}^0}$ получаем первое утверждение.

Рассчитаем скалярное произведение (50):

$$\int DA^kD\theta D\theta^*\Psi_A^*[A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)]\times \\ \times\int D\lambda e^{-2i\int d\mathbf{x}(\lambda_{\mathbf{x}}+i\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\Lambda_{\mathbf{x}}}\Psi_A[A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)],$$

Оно совпадает (42) с точностью до переобозначений. Предложение доказано.

Учитывая соотношения (51) и (52), можно рассмотреть примеры калибровочных преобразований в подходе Гупта–Блейлера. В качестве первого примера укажем калибровочное преобразование (44):

$$\Psi_L\sim\exp(-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}})\Psi_L.$$

Еще один пример — сдвиг функции $A^0$. Это калибровочное преобразование вида

$$\Psi_L\sim\exp(-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\sigma(\mathbf{x})\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})})\Psi_L.$$

Отметим, что гамильтониан скалярной электродинамики в подходе Гупта–Блейлера можно выбрать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_L=\hat{\mathcal{H}}+\hat{A}_0\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}-\frac{\xi}{2}\hat{E}_0^2+\hat{A}^k\partial_k\hat{E}_0,$$

Здесь $\hat{E}_0(\mathbf{x})=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})}$, $\xi$ — произвольный действительный параметр. Полученные с помощью такого гамильтониана уравнения движения будут явно релятивистски ковариантными.

## 3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И НАБЛЮДАЕМЫЕ

Исследуем, как выглядят структуры квазиклассической механики в квантовой скалярной электродинамике при использовании различных подходов.

### A. Кулоновская калибровка

При использовании метода квантования в кулоновской калибровке волновой функционал $\Psi_C=\Psi_C[A_\perp^k,\theta,\theta^*]$ рассматривается только на поверхности $\partial_iA^i=0$. В качестве квазиклассического состояния будем рассматривать функционал вида

$$\Psi_C[A_\perp^k,\theta,\theta^*]=e^{\frac{i}{h}S}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k^\perp(\mathbf{x})(A_\perp^k(\mathbf{x})\sqrt{h}-\mathcal{A}_\perp^k(\mathbf{x}))}\times \\ \times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta(\mathbf{x})(\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h}-\Theta^*(\mathbf{x}))}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta^*(\mathbf{x})(\theta(\mathbf{x})\sqrt{h}-\Theta(\mathbf{x}))}\times \\ \times f\left[A_\perp^k-\frac{\mathcal{A}_\perp^k}{\sqrt{h}},\theta-\frac{\Theta}{\sqrt{h}},\theta^*-\frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right]. \quad (55)$$

Таким образом, элементом расширенного фазового пространства $\mathcal{X}$ представляется следующая совокупность функций:

$$X=\big(S;\mathcal{A}_\perp^k(\mathbf{x});\mathcal{E}_k^\perp(\mathbf{x});\mathrm{Re}\Theta(\mathbf{x});\mathrm{Im}\Theta(\mathbf{x}); \\ \mathrm{Re}\Pi_\theta(\mathbf{x});\mathrm{Im}\Pi_\theta(\mathbf{x})\big)$$

Здесь $\mathcal{E}_k^\perp$ — поперечная часть электрического поля, удовлетворяющая свойству $\partial_k\mathcal{E}_k^\perp=0$.

Учитывая, что

$$\langle\Psi_C,\Psi_C\rangle_C=\int Da_\perp D\vartheta D\vartheta^*\left|f\left[a_\perp^k,\vartheta,\vartheta^*\right]\right|^2,$$

в качестве $\mathcal{F}_X$ выберем пространство функционалов $f=f\left[a_\perp^k,\vartheta,\vartheta^*\right]$ со скалярным произведением

$$\langle f,f\rangle_{\mathcal{F}_X}=\int Da_\perp D\vartheta D\vartheta^*\left|f\left[a_\perp^k,\vartheta,\vartheta^*\right]\right|^2.$$

Оператор $K_X$ переводит функционал $f$ в функционал $\Psi_C$ вида (55).

Считая классические величины зависящими от параметра, на основе соотношения (17) для 1-формы $\omega$ получим:

$$\omega_X[\delta X]=\int d\mathbf{x}\left(\mathcal{E}_k^\perp(\mathbf{x})\mathcal{A}_\perp^k(\mathbf{x})+\Pi_\theta(\mathbf{x})\delta\Theta^*(\mathbf{x})+\right. \\ \left.+\Pi_\theta^*(\mathbf{x})\delta\Theta(\mathbf{x})\right)-\delta S;$$

для операторнозначной 1-формы $\Omega$

$$\Omega_X[\delta X]=\int d\mathbf{x}\left(\delta\mathcal{E}_k^\perp(\mathbf{x})\hat{a}_\perp^k(\mathbf{x})+\delta\Pi_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x})+\right. \\ +\delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x})\hat{\vartheta}(\mathbf{x})-\delta\mathcal{A}_\perp^k(\mathbf{x})\hat{e}_k^\perp(\mathbf{x})- \\ \left.-\delta\Theta(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta^*(\mathbf{x})-\delta\Theta^*(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x})\right),$$

где $\hat{a}^k_\perp(\mathbf{x})$, $\hat{\vartheta}(\mathbf{x})$, $\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x})$ — операторы умножения на $a^k_\perp(\mathbf{x})$, $\vartheta(\mathbf{x})$, $\vartheta^*(\mathbf{x})$ соответственно,

$$\hat{e}^\perp_k(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta a^k_\perp(\mathbf{x})}, \qquad \hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\vartheta^*(\mathbf{x})},$$
$$\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\vartheta(\mathbf{x})}.$$

Отметим отличительную особенность электродинамики в кулоновской калибровке, относящуюся к наблюдаемым величинам. Пусть $O$ — квазиклассическая наблюдаемая величина вида, которой до перехода в кулоновскую калибровку соответствовал оператор

$$\hat{O} = O\left[\sqrt{h}\hat{A}^k(\cdot), \sqrt{h}\hat{E}_k(\cdot), \sqrt{h}\hat{\theta}(\cdot), \sqrt{h}\hat{\theta}^*(\cdot), \sqrt{h}\hat{\pi}_\theta(\cdot), \sqrt{h}\hat{\pi}^*_\theta(\cdot)\right]. \quad (56)$$

При действии на функционал $\Psi_C[A^k,\theta,\theta^*]$ оператор $\hat{E}_k(\mathbf{x})$ должен быть заменен на выражение вида (40). Следовательно, в главном порядке наблюдаемая величина $O$ будет умножать квазиклассическое состояние (55) на число

$$O(X) = O[\mathcal{A}^k_\perp(\cdot), \mathcal{E}^{(C)}_k(\cdot), \Theta(\cdot), \Theta^*(\cdot), \Pi_\theta(\cdot), \Pi^*_\theta(\cdot)],$$

где

$$\mathcal{E}^{(C)}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_k(\mathbf{x}) - \partial_k\Delta^{-1}\times \times\left(\partial_k\mathcal{E}_k(\mathbf{x}) + i\left(\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x}) - \Pi_\theta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x})\right)\right).$$

В первом порядке квазиклассического разложения согласно (18) к оператору умножения на число $O(X)$ добавляется оператор $\sqrt{h}\Xi O(X)$ вида

$$\Xi O(X) = \int d\mathbf{x}\left(\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x})}\Xi\mathcal{E}_k(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x})}\hat{a}^k_\perp(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Theta(\mathbf{x})}\hat{\theta}(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Theta^*(\mathbf{x})}\hat{\theta}^*(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta(\mathbf{x})}\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Pi^*_\theta(\mathbf{x})}\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x})\right),$$

где

$$\Xi\mathcal{E}_k(\mathbf{x}) = \hat{e}_k(\mathbf{x}) - \partial_k\Delta^{-1}\times \times\Big(\partial_l\hat{e}_l(\mathbf{x}) + i(\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}(\mathbf{x}) + \Theta(\mathbf{x})\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x}) - \Pi_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x}) - \Theta^*(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}))\Big),$$

а

$$\hat{e}_k(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta a^k(\mathbf{x})}.$$

Можно заметить, что

$$\Xi O(X) = -\Omega_X[\nabla_O X],$$

где введено обозначение

$$\nabla_O\mathcal{A}^k = \frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_k} - \partial_k\Delta^{-1}\partial_l\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_l};$$
$$\nabla_O\mathcal{E}^\perp_k = -\frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^k};$$
$$\nabla_O\Theta = \frac{\delta O}{\delta\Pi^*_\theta} + i\Theta\Delta^{-1}\partial_l\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_l};$$
$$\nabla_O\Pi_\theta = -\frac{\delta O}{\delta\Theta^*} + i\Pi_\theta\Delta^{-1}\partial_l\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_l};$$
$$\nabla_O\Theta^* = \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta} - i\Theta^*\Delta^{-1}\partial_l\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_l};$$
$$\nabla_O\Pi^*_\theta = -\frac{\delta O}{\delta\Theta} - i\Pi^*_\theta\Delta^{-1}\partial_l\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_l}.$$

### B. Алгебраический подход: квазиклассические состояния

В алгебраическом подходе в качестве квазиклассического состояния будем рассматривать функционал вида

$$\Psi_A[A^k,\theta,\theta^*] = e^{\frac{i}{h}S}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})(A^k(\mathbf{x})\sqrt{h}-\mathcal{A}^k(\mathbf{x}))}\times \times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta(\mathbf{x})(\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h}-\Theta^*(\mathbf{x}))}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi^*_\theta(\mathbf{x})(\theta(\mathbf{x})\sqrt{h}-\Theta(\mathbf{x}))}\times \times g\left[A^k - \frac{\mathcal{A}^k}{\sqrt{h}}, \theta - \frac{\Theta}{\sqrt{h}}, \theta^* - \frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right]. \quad (57)$$

Элементом расширенного фазового пространства $\mathcal{X}$ при этом является совокупность

$$X = (S; \mathcal{A}^k(\mathbf{x}); \mathcal{E}_k(\mathbf{x}); \mathrm{Re}\Theta(\mathbf{x}); \mathrm{Im}\Theta(\mathbf{x}); \mathrm{Re}\Pi_\theta(\mathbf{x}); \mathrm{Im}\Pi_\theta(\mathbf{x})) \quad (58)$$

а элементом $\mathcal{F}_X$ — функционал

$$g[a^k,\vartheta,\vartheta^*].$$

Обозначим, как и в случае кулоновской калибровки, через $\hat{a}^k(\mathbf{x})$, $\hat{\vartheta}(\mathbf{x})$, $\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x})$ — операторы умножения на $a^k_\perp(\mathbf{x})$, $\vartheta(\mathbf{x})$, $\vartheta^*(\mathbf{x})$ соответственно, а через

$$\hat{e}_k(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta a^k(\mathbf{x})}, \qquad \hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\vartheta^*(\mathbf{x})},$$
$$\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\vartheta(\mathbf{x})}$$

операторы дифференцирования.

Особенность алгебраического подхода проявляется в том, что не всякая совокупность (58) образует классическое состояние, а скалярное произведение функционалов $g$ также отличается от обычного.

**Предложение 5** *1. Скалярное произведение $\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle$ не является экспоненциально малым, только если*

$$\Lambda_{\mathbf{x}} = \partial_k\mathcal{E}_k(\mathbf{x}) + i(\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x}) - \Pi_\theta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x})) = 0. \qquad (59)$$

*2. При выполнении условия* (59) *скалярное произведение в главном порядке по $h$ равно*

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A \simeq \int DaD\vartheta D\vartheta^* g^*\left[a^k,\vartheta,\vartheta^*\right]\prod_{\mathbf{x}}\delta(\Xi\Lambda_{\mathbf{x}})g\left[a^k,\vartheta,\vartheta^*\right], \qquad (60)$$

*причем операторы*

$$\Xi\Lambda_{\mathbf{x}} = \partial_l\hat{e}_l(\mathbf{x}) + i(\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}(\mathbf{x}) + \Theta(\mathbf{x})\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x}) - \Pi_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x}) - \Theta^*(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x})) \qquad (61)$$

*коммутируют:*

$$[\Xi\Lambda_{\mathbf{x}},\Xi\Lambda_{\mathbf{y}}] = 0. \qquad (62)$$

**Доказательство**. Согласно (46),

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DAD\theta^*D\theta D\alpha e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}(\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\partial_k\alpha(\mathbf{x})+\Pi_\theta(\mathbf{x})\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h}(e^{i\alpha(\mathbf{x})}-1)+\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})\sqrt{h}(e^{-i\alpha(\mathbf{x})}-1))}\times$$
$$\times g^*\left[A^k-\frac{\mathcal{A}^k}{\sqrt{h}},\theta-\frac{\Theta}{\sqrt{h}},\theta^*-\frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right] g\left[A^k-\frac{\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha}{\sqrt{h}},\theta e^{-i\alpha}-\frac{\Theta}{\sqrt{h}},\theta^*e^{i\alpha}-\frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right].$$

После замены

$$A^k(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{A}^k(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} + a^k(\mathbf{x}), \qquad \theta(\mathbf{x}) = \frac{\Theta(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} + \vartheta(\mathbf{x}), \qquad \theta^*(\mathbf{x}) = \frac{\Theta^*(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} + \vartheta(\mathbf{x})$$

скалярное произведение приводится к виду

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DaD\vartheta^*D\vartheta D\alpha e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\partial_k\alpha(\mathbf{x})}\times$$
$$\times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}(\Pi_\theta(\mathbf{x})(\Theta^*(\mathbf{x})+\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h})(e^{i\alpha(\mathbf{x})}-1)+\Pi^*_\theta(\mathbf{x})(\Theta(\mathbf{x})+\theta(\mathbf{x})\sqrt{h})(e^{-i\alpha(\mathbf{x})}-1))}\times$$
$$\times g^*\left[a^k,\vartheta,\vartheta^*\right] g\left[a^k+\frac{\partial_k\alpha}{\sqrt{h}},\vartheta e^{-i\alpha}-\frac{\Theta(1-e^{-i\alpha})}{\sqrt{h}},\vartheta^*e^{i\alpha}-\frac{\Theta^*(1-e^{i\alpha})}{\sqrt{h}}\right].$$

Подынтегральное выражение не является экспоненциально малым, только если функция $\alpha(\mathbf{x})$ порядка $\sqrt{h}$. Поэтому проведем замену

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{h}\beta(\mathbf{x}).$$

После замены получим:

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DaD\vartheta^*D\vartheta D\beta e^{\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\partial_k\beta(\mathbf{x})}\times$$
$$\times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}(\Pi_\theta(\mathbf{x})(\Theta^*(\mathbf{x})+\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h})(e^{i\sqrt{h}\beta(\mathbf{x})}-1)+\Pi^*_\theta(\mathbf{x})(\Theta(\mathbf{x})+\theta(\mathbf{x})\sqrt{h})(e^{-i\sqrt{h}\beta(\mathbf{x})}-1))}\times$$
$$\times g^*\left[a^k,\vartheta,\vartheta^*\right] g\left[a^k+\partial_k\beta,\vartheta e^{-i\sqrt{h}\beta}-\frac{\Theta(1-e^{-i\sqrt{h}\beta})}{\sqrt{h}},\vartheta^*e^{i\sqrt{h}\beta}-\frac{\Theta^*(1-e^{i\sqrt{h}\beta})}{\sqrt{h}}\right].$$

Отсюда в главном порядке по $h$:

$$\langle\Psi_A,\Psi_A\rangle_A = \int DaD\vartheta^*D\vartheta D\beta e^{-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})\partial_k\mathcal{E}_k(\mathbf{x})}e^{\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}i\beta(\mathbf{x})(\Pi_\theta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x})-\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x}))}\times$$
$$\times e^{i\int d\mathbf{x}i\beta(\mathbf{x})(\Pi_\theta(\mathbf{x})\vartheta^*(\mathbf{x})-\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\vartheta(\mathbf{x}))}e^{-\frac{i}{2}\int d\mathbf{x}\beta^2(\mathbf{x})(\Pi_\theta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x})+\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x}))}\times$$
$$\times g^*\left[a^k,\vartheta,\vartheta^*\right] g\left[a^k+\partial_k\beta,\vartheta-i\beta\Theta,\vartheta^*+i\beta\Theta^*\right].$$

Если

$$\partial_k \mathcal{E}_k(\mathbf{x}) - i(\Pi_\theta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x}) - \Pi_\theta^*(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x})) \neq 0,$$

рассматриваемый интеграл содержит быстро осциллирующую экспоненту и поэтому является экспоненциально малым. Только при условии (59) скалярное произведение $\langle \Psi_A, \Psi_A \rangle$ не является экспоненциально малым. В этом случае оно преобразуется к виду

$$\langle \Psi_A, \Psi_A \rangle_A = \int DaD\vartheta^* D\vartheta D\beta g^* \left[a^k, \vartheta, \vartheta^*\right] \times \\ \times e^{i \int d\mathbf{x} i\beta(\mathbf{x})(\Pi_\theta(\mathbf{x})\vartheta^*(\mathbf{x}) - \Pi_\theta^*(\mathbf{x})\vartheta(\mathbf{x}))} e^{-\frac{i}{2}\int d\mathbf{x}\beta^2(\mathbf{x})(\Pi_\theta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x}) + \Pi_\theta^*(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x}))} \times \\ \times e^{\int d\mathbf{x}\left(\partial_k\beta(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta a^k((\mathbf{x}))} - i\beta(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\vartheta(\mathbf{x})} + i\beta(\mathbf{x})\Theta^*(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\vartheta^*(\mathbf{x})}\right)} g\left[a^k, \vartheta, \vartheta^*\right].$$

Используя формулу для экспоненты суммы операторов, коммутатор которых пропорционален единичному оператору, приведем выражение к виду:

$$\langle \Psi_A, \Psi_A \rangle_A = \int DaD\vartheta^* D\vartheta g^* \left[a^k, \vartheta, \vartheta^*\right] \times \\ \times \int D\beta e^{i\int d\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})(i\Pi_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x}) - i\Pi_\theta^*(\mathbf{x})\hat{\vartheta}(\mathbf{x}) - \partial_k \hat{e}_k(\mathbf{x}) - i\Theta(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta^*(\mathbf{x}) + i\Theta^*(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}))} g\left[a^k, \vartheta, \vartheta^*\right],$$

что соответствует (60). Коммутационное соотношение (62) проверяется непосредственно.

Предложение доказано.

Как показывает предложение 5, в качестве расширенного фазового пространства классической системы следует рассматривать совокупность всех таких наборов (58), которые удовлетворяют условию (59). Необычным является скалярное произведение для $\mathcal{F}_X$: оно содержит дельта-функцию от операторов

$$(g, g)_{\mathcal{F}_X} = \int DaD\vartheta D\vartheta^* g^* \left[a^k, \vartheta, \vartheta^*\right] \times \\ \times \prod_{\mathbf{x}} \delta(\Xi\Lambda_{\mathbf{x}}) g\left[a^k, \vartheta, \vartheta^*\right]. \quad (63)$$

Дифференциальные 1-формы $\omega$ и $\Omega$ имеют обычный вид:

$$\omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x}\left(\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x}) + \Pi_\theta(\mathbf{x})\delta\Theta^*(\mathbf{x}) + \right. \\ \left. + \Pi_\theta^*(\mathbf{x})\delta\Theta(\mathbf{x})\right) - \delta S; \quad (64)$$

$$\Omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x}\left(\delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\hat{a}^k(\mathbf{x}) + \delta\Pi_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x}) + \right. \\ + \delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x})\hat{\vartheta}(\mathbf{x}) - \delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x})\hat{e}_k(\mathbf{x}) - \\ \left. - \delta\Theta(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta^*(\mathbf{x}) - \delta\Theta^*(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x})\right). \quad (65)$$

Следующее предложение показывает, что оператор $\Omega_X[\delta X]$ сохраняет отношение эквивалентности: он переводит состояние $\int d\mathbf{x}\Xi\Lambda_{\mathbf{x}}\gamma(\mathbf{x})\tilde{g}$ с нулевой нормой (эквивалентное нулю) в состояние с нулевой нормой.

**Предложение 6** *Пусть $\delta X$ — касательный вектор к поверхности* (59). *Тогда*

$$[\Omega_X[\delta X], \Xi\Lambda_{\mathbf{x}}] = 0.$$

**Доказательство**. Достаточно явным вычислением показать, что справедливо свойство, аналогичное (22):

$$[\Omega_X[\delta X], \Xi\Lambda_{\mathbf{x}}] = i\delta\Lambda_{\mathbf{x}},$$

где через $\delta\Lambda_{\mathbf{x}}$ обозначено значение 1-формы $d\Lambda_{\mathbf{x}}$ на касательном векторе $\delta X$ в точке $X$:

$$\delta\Lambda_{\mathbf{x}} = \partial_k\delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x}) + i\left(\Theta(\mathbf{x})\delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x}) + \right. \\ \left. + \Pi_\theta^*(\mathbf{x})\delta\Theta(\mathbf{x}) - \Theta^*(\mathbf{x})\delta\Pi_\theta(\mathbf{x}) - \Pi_\theta(\mathbf{x})\delta\Theta^*(\mathbf{x})\right).$$

Поскольку соотношение (59) должно выполняться как для $X$, так и для $X + \Delta X$, $\delta\Lambda_{\mathbf{x}} = 0$. Предложение доказано.

Рассмотрим наблюдаемую величину типа (56). Согласно (18), в нулевом порядке квазиклассического разложения данная наблюдаемая величина является оператором умножения на число $O(X)$, в первом порядке добавляется слагаемое $\sqrt{h}\Xi O(X)$ вида

$$\Xi O(X) = \int d\mathbf{x}\left(\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x})}\hat{e}_k(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x})}\hat{a}^k(\mathbf{x}) + \right. \\ + \frac{\delta O}{\delta\Theta(\mathbf{x})}\hat{\theta}(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Theta^*(\mathbf{x})}\hat{\theta}^*(\mathbf{x}) + \\ \left. + \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta(\mathbf{x})}\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x})}\hat{\pi}_\vartheta^*(\mathbf{x})\right).$$

Будем называть функцию $O$ калибровочно инвариантной, если

$$O[\mathcal{A}^k - \partial_k\alpha, \mathcal{E}_k, \Theta e^{i\alpha}, \Theta^* e^{-i\alpha}, \Pi_\theta e^{i\alpha}, \Pi_\theta^* e^{-i\alpha}] = \\ = O[\mathcal{A}^k, \mathcal{E}_k, \Theta, \Theta^*, \Pi_\theta, \Pi_\theta^*]. \quad (66)$$

Оператор $\Xi O(X)$ можно представить через оператор-нозначную 1-форму $\Omega$. Для этого обозначим

$$\nabla_O \mathcal{A}^k = \frac{\delta O}{\delta \mathcal{E}_k}; \qquad \nabla_O \Theta = \frac{\delta O}{\delta \Pi_\theta^*};$$
$$\nabla_O \Theta^* = \frac{\delta O}{\delta \Pi_\theta}; \qquad \nabla_O \mathcal{E}_k = -\frac{\delta O}{\delta \mathcal{A}^k};$$
$$\nabla_O \Pi_\theta = -\frac{\delta O}{\delta \Theta^*}; \qquad \nabla_O \Pi_\theta^* = -\frac{\delta O}{\delta \Theta}.$$

и

$$\nabla_O \Lambda_{\mathbf{x}} = \partial_k \nabla_O \mathcal{E}_k(\mathbf{x}) + i\,(\Theta(\mathbf{x})\nabla_O \Pi_\theta^*(\mathbf{x})+$$
$$+\Pi_\theta^*(\mathbf{x})\nabla_O \Theta(\mathbf{x}) - \Theta^*(\mathbf{x})\nabla_O \Pi_\theta(\mathbf{x}) - \Pi_\theta(\mathbf{x})\nabla_O \Theta^*(\mathbf{x}))\,.$$

**Предложение 7** *1. Для калибровочно инвариантной функции $O$ справедливо соотношение $\nabla_O \Lambda_{\mathbf{x}} = 0$ и, таким образом, $\nabla_O X$ является касательным вектором к поверхности* (59).

*2. Справедливо свойство*

$$\Xi O(X) = -\Omega_X[\nabla_O X],$$

Для доказательства первого пункта достаточно провести вариационное дифференцирование соотношения (66) по $\alpha(\mathbf{x})$. Второй пункт вытекает из явного вида операторов $\Xi O$ и $\Omega_X[\nabla_O X]$.

### C. Алгебраический подход: калибровочная эквивалентность

Еще одна отсутствовавшая в квантовой механике особенность алгебраического подхода к квазиклассической электродинамике — наличие калибровочно эквивалентных квазиклассических состояний.

**Предложение 8** *Пусть $X$ и $\overline{X}$ — элементы $\mathcal{X}$, связанные соотношением*

$$\begin{gathered}\overline{S} = S, \qquad \overline{\mathcal{A}}^k(\mathbf{x}) = \mathcal{A}^k(\mathbf{x}) - \partial_k\alpha(\mathbf{x}),\\ \overline{\Theta}(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x})e^{i\alpha(\mathbf{x})}, \qquad \overline{\Theta}^*(\mathbf{x}) = \Theta^*(\mathbf{x})e^{-i\alpha(\mathbf{x})},\\ \overline{\mathcal{E}}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_k(\mathbf{x}), \qquad \overline{\Pi_\theta}(\mathbf{x}) = \Pi_\theta(\mathbf{x})e^{i\alpha(\mathbf{x})},\\ \overline{\Pi_\theta}^*(\mathbf{x}) = \Pi_\theta^*(\mathbf{x})e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\end{gathered} \tag{67}$$

*для некоторой функции $\alpha(\mathbf{x})$. Пусть также*

$$\overline{g}[a^k, \vartheta, \vartheta^*] = g[a^k, \vartheta e^{-i\alpha}, \vartheta^* e^{i\alpha}]. \tag{68}$$

*Тогда квазиклассические состояния $K_X g$ и $K_{\overline{X}}\overline{g}$ калибровочно эквивалентны.*

**Доказательство**. По построению, $\Psi_A = K_X g$ имеет вид (57). Рассмотрим функционал

$$\overline{\Psi}_A = \exp(-\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}})\Psi_A,$$

который согласно предложению 2 имеет вид

$$\overline{\Psi}[A^k,\theta,\theta^*] = \Psi_A[A^k + \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_k\alpha, \theta e^{-i\alpha}, \theta^* e^{i\alpha}].$$

Отсюда с учетом (57) получим:

$$\overline{\Psi}_A[A^k,\theta,\theta^*] = e^{\frac{i}{h}S} e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})(A^k(\mathbf{x})\sqrt{h}+\partial_k\alpha(\mathbf{x})-\mathcal{A}^k(\mathbf{x}))} e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta(\mathbf{x})(\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h}e^{i\alpha(\mathbf{x})}-\Theta^*(\mathbf{x}))}\times$$
$$\times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta^*(\mathbf{x})(\theta(\mathbf{x})\sqrt{h}e^{-i\alpha(\mathbf{x})}-\Theta(\mathbf{x}))} g\left[A^k - \frac{\mathcal{A}^k - \partial_k\alpha}{\sqrt{h}}, \theta e^{-i\alpha} - \frac{\Theta}{\sqrt{h}}, \theta^* e^{i\alpha} - \frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right]. \tag{69}$$

Следовательно, $\overline{\Psi}_A = K_{\overline{X}}\overline{g}$. Предложение доказано.

Таким образом, на квазиклассическом расслоении определено калибровочное преобразование. Оно переводит $X \mapsto \overline{X}$; функционал $g$ переводится в $\overline{g}$ согласно (68):

$$V_{\overline{X}\leftarrow X} : g \mapsto \overline{g}.$$

Рассмотрим касательный вектор $\delta X$; при калибровочном преобразовании (67) он переходит в касательный вектор $\overline{\delta X}$ вида

$$\begin{gathered}\overline{\delta S} = \delta S, \qquad \overline{\delta\mathcal{A}}^k(\mathbf{x}) = \delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x}),\\ \overline{\delta\Theta}(\mathbf{x}) = \delta\Theta(\mathbf{x})e^{i\alpha(\mathbf{x})}, \qquad \overline{\delta\Theta}^*(\mathbf{x}) = \delta\Theta^*(\mathbf{x})e^{-i\alpha(\mathbf{x})},\\ \overline{\delta\mathcal{E}}_k(\mathbf{x}) = \delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x}),\\ \overline{\delta\Pi_\theta}(\mathbf{x}) = \delta\Pi_\theta(\mathbf{x})e^{i\alpha(\mathbf{x})}, \qquad \overline{\delta\Pi_\theta}^*(\mathbf{x}) = \delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x})e^{-i\alpha(\mathbf{x})}.\end{gathered}$$

Следующее предложение показывает, что введенные квазиклассические структуры инвариантны относительно калибровочного преобразования.

**Предложение 9** *1. Дифференциальные формы $\omega$ и $\Omega$*

*удовлетворяют свойствам*

$$\omega_{\overline{X}}[\overline{\delta X}] = \omega_X[\delta X], \qquad \Omega_{\overline{X}}[\overline{\delta X}]V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\Omega_X[\delta X].$$

*2. Для калибровочно инвариантной функции $O(X)$ справедливо соотношение*

$$\nabla_O \overline{X} = \overline{\nabla_O X}.$$

**Доказательство.** Соотношение для 1-формы $\omega$ сразу же получается из определения (64).

Как вытекает из (65), исследуемое свойство 1-формы $\Omega$ представляется в виде совокупности следующих соотношений:

$$\begin{gathered}
\hat{a}^k(\mathbf{x})V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\hat{a}^k(\mathbf{x});\\
\hat{e}_k(\mathbf{x})V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\hat{e}_k(\mathbf{x});\\
e^{i\alpha(\mathbf{x})}\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x})V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x});\\
e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\hat{\vartheta}(\mathbf{x})V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\hat{\vartheta}(\mathbf{x});\\
e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x})V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\hat{e}_k(\mathbf{x});\\
e^{i\alpha(\mathbf{x})}\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x})V_{\overline{X}\leftarrow X} = V_{\overline{X}\leftarrow X}\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x}).
\end{gathered}$$

которые вытекают из конструкции оператора $V_{\overline{X}\leftarrow X}: g \mapsto \overline{g}$.

Для проверки второго соотношения запишем явно $\overline{\nabla_O X}$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla_O \mathcal{A}^k}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta}{\delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k,\mathcal{E}_k,\Theta,\Theta^*,\Pi_\theta,\Pi_\theta^*];\\
\overline{\nabla_O \mathcal{E}_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k,\mathcal{E}_k,\Theta,\Theta^*,\Pi_\theta,\Pi_\theta^*];\\
\overline{\nabla_O \Theta}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta}{\delta\Pi^*_\theta(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k,\mathcal{E}_k,\Theta,\Theta^*,\Pi_\theta,\Pi_\theta^*]e^{i\alpha};\\
\overline{\nabla_O \Theta^*}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta}{\delta\Pi_\theta(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k,\mathcal{E}_k,\Theta,\Theta^*,\Pi_\theta,\Pi_\theta^*]e^{-i\alpha};\\
\overline{\nabla_O \Pi_\theta}(\mathbf{x}) &= -\frac{\delta}{\delta\Theta^*(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k,\mathcal{E}_k,\Theta,\Theta^*,\Pi_\theta,\Pi_\theta^*]e^{i\alpha};\\
\overline{\nabla_O \Pi^*_\theta}(\mathbf{x}) &= -\frac{\delta}{\delta\Theta(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k,\mathcal{E}_k,\Theta,\Theta^*,\Pi_\theta,\Pi_\theta^*]e^{-i\alpha}
\end{aligned}$$

и $\nabla_O\overline{X}$:

$$\begin{aligned}
\nabla_O\overline{\mathcal{A}^k}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta}{\delta\overline{\mathcal{E}}_k(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha,\mathcal{E}_k,\Theta e^{i\alpha},\Theta^*e^{-i\alpha},\Pi_\theta e^{i\alpha},\Pi_\theta^*e^{-i\alpha}];\\
\nabla_O\overline{\mathcal{E}_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{\delta}{\delta\overline{\mathcal{A}}^k(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha,\mathcal{E}_k,\Theta e^{i\alpha},\Theta^*e^{-i\alpha},\Pi_\theta e^{i\alpha},\Pi_\theta^*e^{-i\alpha}];\\
\nabla_O\overline{\Theta}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta}{\delta\overline{\Pi^*_\theta}(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha,\mathcal{E}_k,\Theta e^{i\alpha},\Theta^*e^{-i\alpha},\Pi_\theta e^{i\alpha},\Pi_\theta^*e^{-i\alpha}];\\
\nabla_O\overline{\Theta^*}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta}{\delta\overline{\Pi_\theta}(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha,\mathcal{E}_k,\Theta e^{i\alpha},\Theta^*e^{-i\alpha},\Pi_\theta e^{i\alpha},\Pi_\theta^*e^{-i\alpha}];\\
\nabla_O\overline{\Pi_\theta}(\mathbf{x}) &= -\frac{\delta}{\delta\overline{\Theta^*}(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha,\mathcal{E}_k,\Theta e^{i\alpha},\Theta^*e^{-i\alpha},\Pi_\theta e^{i\alpha},\Pi_\theta^*e^{-i\alpha}];\\
\nabla_O\overline{\Pi^*_\theta}(\mathbf{x}) &= -\frac{\delta}{\delta\overline{\Theta}(\mathbf{x})}O[\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha,\mathcal{E}_k,\Theta e^{i\alpha},\Theta^*e^{-i\alpha},\Pi_\theta e^{i\alpha},\Pi_\theta^*e^{-i\alpha}].
\end{aligned}$$

Свойство $\nabla_O\overline{X} = \overline{\nabla_O X}$ получается вариационным дифференцированием соотношения (66) по $\alpha(\mathbf{x})$. Предложение доказано.

### D. Взаимосвязь алгебраического подхода и квантования в кулоновской калибровке

Исследуем соответствие между квазиклассическими состояниями в алгебраическом подходе и в кулоновской калибровке. Для этого прежде всего следует при помощи калибровочных преобразований (67), (68) добиться, чтобы условие кулоновской калибровки было выполнено для классического состояния:

$$\partial_k\mathcal{A}^k = 0. \tag{70}$$

**Предложение 10** *Пусть выполнено условие* (70). *Тогда волновому функционалу $\Psi_A$ вида* (57) *соответствует волновой функционал $\Psi_C$ вида* (55)*, причем*

$$f[a_k^\perp,\vartheta,\vartheta^*] = \prod_{\mathbf{x}}\delta(\Xi\Lambda_{\mathbf{x}})g\left[a^k,\vartheta,\vartheta^*\right], \tag{71}$$

**Доказательство**. Воспользуемся формулой (48):

$$\Psi_C[A^k_\perp,\theta,\theta^*] = \int D\alpha\Psi_A[A^k_\perp + \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_k\alpha,\theta e^{-i\alpha},\theta^*e^{i\alpha}].$$

Подставляя в нее соотношение (59), получим:

$$\Psi_C[A^k_\perp,\theta,\theta^*]=\int D\alpha e^{\frac{i}{h}S}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})(A^k_\perp(\mathbf{x})\sqrt{h}+\partial_k\alpha(\mathbf{x})-\mathcal{A}^k(\mathbf{x}))}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta(\mathbf{x})(\theta^*(\mathbf{x})e^{i\alpha(\mathbf{x})}\sqrt{h}-\Theta^*(\mathbf{x}))}\times$$
$$\times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi^*_\theta(\mathbf{x})(\theta(\mathbf{x})e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\sqrt{h}-\Theta(\mathbf{x}))}g\left[A^k_\perp-\frac{\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha}{\sqrt{h}},\theta e^{-i\alpha}-\frac{\Theta}{\sqrt{h}},\theta^*e^{i\alpha}-\frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right].$$

Заметим, что подынтегральное выражение не является экспоненциально малым, только если $\alpha$ порядка $\sqrt{h}$: иначе нельзя подобрать такое $A^k_\perp$, чтобы $A^k_\perp-\frac{\mathcal{A}^k-\partial_k\alpha}{\sqrt{h}}$ было бы порядка единицы, так как $\partial_k\mathcal{A}^k=0$ и $\partial_kA^k_\perp=0$. Поэтому проведем замену $\alpha(\mathbf{x})=\sqrt{h}\beta(\mathbf{x})$. Используя переобозначение

$$A^k_\perp(\mathbf{x})=\frac{\mathcal{A}^k(\mathbf{x})}{\sqrt{h}}+a^k_\perp(\mathbf{x}),\qquad\theta(\mathbf{x})=\frac{\Theta(\mathbf{x})}{\sqrt{h}}+\vartheta(\mathbf{x}),\qquad\theta^*(\mathbf{x})=\frac{\Theta^*(\mathbf{x})}{\sqrt{h}}+\vartheta^*(\mathbf{x}),$$

приведем выражение для $\Psi_C$ к виду (55) при

$$f[a^\perp_k,\vartheta,\vartheta^*]=\int D\beta e^{\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\partial_k\beta(\mathbf{x})}\times$$
$$\times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta(\mathbf{x})\cdot(\Theta^*(\mathbf{x})+\vartheta^*(\mathbf{x})\sqrt{h})\cdot(e^{i\sqrt{h}\beta(\mathbf{x})}-1)}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi^*_\theta(\mathbf{x})\cdot(\Theta(\mathbf{x})+\vartheta(\mathbf{x})\sqrt{h})\cdot(e^{-i\sqrt{h}\beta(\mathbf{x})}-1)}\times$$
$$\times g\left[a^k_\perp+\partial_k\beta,\frac{\Theta}{\sqrt{h}}(e^{-i\beta\sqrt{h}}-1)+\vartheta e^{-i\beta\sqrt{h}},\frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}(e^{i\beta\sqrt{h}}-1)+\vartheta^*e^{i\beta\sqrt{h}}\right].$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство предложения 5. Рассматриваемый интеграл не является экспоненциально малым только при выполнении условия (59). При соблюдении данного условия он приводится к виду (71).

### E. Квантование по Гупта–Блейлеру

Исследуем квазиклассическую электродинамику в подходе Гупта–Блейлера. В качестве квазиклассического состояния будем рассматривать функционал вида

$$\Psi_L[A^0,A^k,\theta,\theta^*]=e^{\frac{i}{h}S}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_0(\mathbf{x})(A^0(\mathbf{x})\sqrt{h}-\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\mathcal{E}_k(\mathbf{x})(A^k(\mathbf{x})\sqrt{h}-\mathcal{A}^k(\mathbf{x}))}\times$$
$$\times e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi_\theta(\mathbf{x})(\theta^*(\mathbf{x})\sqrt{h}-\Theta^*(\mathbf{x}))}e^{\frac{i}{h}\int d\mathbf{x}\Pi^*_\theta(\mathbf{x})(\theta(\mathbf{x})\sqrt{h}-\Theta(\mathbf{x}))}\times$$
$$\times v\left[A^0-\frac{\mathcal{A}^0}{\sqrt{h}},A^k-\frac{\mathcal{A}^k}{\sqrt{h}},\theta-\frac{\Theta}{\sqrt{h}},\theta^*-\frac{\Theta^*}{\sqrt{h}}\right].\qquad(72)$$

Соотношение (72) следует рассматривать при

$$A^0(\mathbf{x})-\frac{\mathcal{A}^0(\mathbf{x})}{\sqrt{h}}=O(1).$$

Элементом расширенного фазового пространства $\mathcal{X}$ при этом является совокупность

$$X=(S;\mathcal{A}^0(\mathbf{x});\mathcal{E}_0(\mathbf{x});\mathcal{A}^k(\mathbf{x});\mathcal{E}_k(\mathbf{x});\mathrm{Re}\Theta(\mathbf{x});\mathrm{Im}\Theta(\mathbf{x});$$
$$\mathrm{Re}\Pi_\theta(\mathbf{x});\mathrm{Im}\Pi_\theta(\mathbf{x})),\qquad(73)$$

а элементом $\mathcal{F}_X$ — функционал

$$v[a^0,a^k,\vartheta,\vartheta^*].$$

Через $K^h_X$ обозначим оператор, переводящий фукционал $v$ в функционал $\Psi_L$.

Обозначим, как и в рассмотренных ранее случаях, через $\hat{a}^0(\mathbf{x})$, $\hat{a}^k(\mathbf{x})$, $\hat{\vartheta}(\mathbf{x})$, $\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x})$ операторы умножения на $a^0_\perp(\mathbf{x})$, $a^k_\perp(\mathbf{x})$, $\vartheta(\mathbf{x})$, $\vartheta^*(\mathbf{x})$ соответственно, а через

$$\hat{e}_0(\mathbf{x})=-i\frac{\delta}{\delta a^0(\mathbf{x})},\qquad\hat{e}_k(\mathbf{x})=-i\frac{\delta}{\delta a^k(\mathbf{x})},$$
$$\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x})=-i\frac{\delta}{\delta\vartheta^*(\mathbf{x})},\qquad\hat{\pi}^*_\vartheta(\mathbf{x})=-i\frac{\delta}{\delta\vartheta(\mathbf{x})}$$

— операторы дифференцирования.

**Предложение 11** *1. Скалярное произведение функций* (72) *имеет вид*

$$\langle\Psi_L,\Psi_L\rangle_L=\int DA^kD\lambda D\theta D\theta^*\times$$
$$\times(v[-i\lambda(\cdot),A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)])^*v[i\lambda(\cdot),A^k(\cdot),\theta(\cdot),\theta^*(\cdot)].$$

*2. Справедливы коммутационные свойства*

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})}K_X^h = K_X^h(\mathcal{E}_0(\mathbf{x}) + \sqrt{h}\hat{e}_0(\mathbf{x}) + \ldots);$$
$$\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}K_X^h = K_X^h(\Lambda_{\mathbf{x}} + \sqrt{h}\Xi\Lambda_{\mathbf{x}}) + \ldots),$$

*где* $\Lambda_{\mathbf{x}}$ *имеет вид* (59), *а* $\Xi\Lambda_{\mathbf{x}}$ — *вид* (61).

*3. Условие* (51), *накладываемое на волновой функционал* $K_X^h v$ *вида* (72), *приводит к соотношениям для* $X$

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{x}) = 0, \qquad \Lambda_{\mathbf{x}} = 0 \tag{74}$$

*и для* $v$

$$\left[\hat{e}_0(\mathbf{x}) - \frac{i}{\sqrt{-\Delta}}\Xi\Lambda_{\mathbf{x}}\right]v = 0.$$

*4. Квазиклассические состояния вида* $K_X^h v$ *и* $K_X^h\overline{v}$ *при*

$$\overline{v} = v + \left[\hat{e}_0(\mathbf{x}) + \frac{i}{\sqrt{-\Delta}}\Xi\Lambda_{\mathbf{x}}\right]\zeta$$

*являются эквивалентными.*

Первое и второе утверждения проверяются непосредственным вычислением, третье вытекает из второго. Четвертое утверждение вытекает из свойства

$$\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^0(\mathbf{x})} + \frac{i}{\sqrt{-\Delta}}\Lambda_{\mathbf{x}}\right]K_X^h\zeta \sim 0.$$

Обратим внимание на измененную роль классических условий связи (74). В алгебраическом подходе квазиклассический волновой функционал, не удовлетворяющей условию (59), можно сконструировать; но он окажется экспоненциально мал. В методе Гупта–Блейлера при нарушении условия (74) не будет выполняться условие (51) — функционал окажется нефизическим состоянием.

Предложение 11 показывает, что в качестве расширенного фазового пространства следует рассматривать совокупность всех таких наборов (73), которые удовлетворяют условиям (74). Скалярное произведение в $\mathcal{F}_X$ определим формулой

$$(v,v)_{\mathcal{F}_X} = \\ = \int DA^k D\lambda D\theta D\theta^*(v[-i\lambda(\cdot), A^k(\cdot), \theta(\cdot), \theta^*(\cdot)])^* \times \\ \times v[i\lambda(\cdot), A^k(\cdot), \theta(\cdot), \theta^*(\cdot)]. \tag{75}$$

Дифференциальные 1-формы $\omega$ и $\Omega$ имеют обычный вид:

$$\omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x}\,(\mathcal{E}_0(\mathbf{x})\delta\mathcal{A}^0(\mathbf{x}) + \mathcal{E}_k(\mathbf{x})\delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x}) + \\ + \Pi_\theta(\mathbf{x})\delta\Theta^*(\mathbf{x}) + \Pi_\theta^*(\mathbf{x})\delta\Theta(\mathbf{x})) - \delta S; \tag{76}$$

$$\Omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x}\,(\delta\mathcal{E}_0(\mathbf{x})\hat{a}^0(\mathbf{x}) + \delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x})\hat{a}^k(\mathbf{x}) + \\ + \delta\Pi_\theta(\mathbf{x})\hat{\vartheta}^*(\mathbf{x}) + \delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x})\hat{\vartheta}(\mathbf{x}) - \delta\mathcal{A}^0(\mathbf{x})\hat{e}_0(\mathbf{x}) - \\ - \delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x})\hat{e}_k(\mathbf{x}) - \delta\Theta(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta^*(\mathbf{x}) - \delta\Theta^*(\mathbf{x})\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}))\,. \tag{77}$$

Следует, однако, иметь в виду, что

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{x}) = 0, \qquad \delta\mathcal{E}_0(\mathbf{x}) = 0, \qquad \hat{e}_0(\mathbf{x})v \sim 0.$$

По аналогии с алгебраическим подходом доказывается

**Предложение 12** *Пусть* $\delta X$ — *касательный вектор к поверхности* (74). *Тогда*

$$[\Omega_X[\delta X], \Xi\Lambda_{\mathbf{x}}] = 0, \qquad [\Omega_X[\delta X], \hat{e}_0(\mathbf{x})] = 0.$$

Предложение показывает, что оператор $\Omega_X[\delta X]$ переводит физические состояния в физические и сохраняет отношение эквивалентности (п. 4 предложения 11).

Рассмотрим оператор $\hat{O}$, зависящий от параметра $h$ как

$$\hat{O} = O\left[\sqrt{h}\hat{A}^0(\cdot), \sqrt{h}\hat{E}_0(\cdot), \sqrt{h}\hat{A}^k(\cdot), \sqrt{h}\hat{E}_k(\cdot), \\ \sqrt{h}\hat{\theta}(\cdot), \sqrt{h}\hat{\theta}^*(\cdot), \sqrt{h}\hat{\pi}_\theta(\cdot), \sqrt{h}\hat{\pi}_\theta^*(\cdot)\right]. \tag{78}$$

В соответствии с (18), в нулевом порядке квазиклассического разложения данная наблюдаемая величина является оператором умножения на число $O(X)$, в первом порядке добавляется слагаемое $\sqrt{h}\Xi O(X)$ вида

$$\Xi O(X) = \int d\mathbf{x}\left(\frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_0(\mathbf{x})}\hat{e}_0(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^0(\mathbf{x})}\hat{a}^0(\mathbf{x}) + \right. \\ + \frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_k(\mathbf{x})}\hat{e}_k(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^k(\mathbf{x})}\hat{a}^k(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Theta(\mathbf{x})}\hat{\theta}(\mathbf{x}) + \\ \left. + \frac{\delta O}{\delta\Theta^*(\mathbf{x})}\hat{\theta}^*(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta(\mathbf{x})}\hat{\pi}_\vartheta(\mathbf{x}) + \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta^*(\mathbf{x})}\hat{\pi}_\vartheta^*(\mathbf{x})\right).$$

Будем называть функцию $O$ калибровочно инвариантной, если

$$O[\mathcal{A}^0 + \beta,\, \mathcal{E}_0,\, \mathcal{A}^k - \partial_k\alpha,\, \mathcal{E}_k,\, \Theta e^{i\alpha}, \\ \Theta^* e^{-i\alpha},\, \Pi_\theta e^{i\alpha},\, \Pi_\theta^* e^{-i\alpha}] = \\ = O[\mathcal{A}^0, \mathcal{E}_0, \mathcal{A}^k, \mathcal{E}_k, \Theta, \Theta^*, \Pi_\theta, \Pi_\theta^*]. \tag{79}$$

Оператор $\Xi O(X)$ можно представить через операторнозначную 1-форму $\Omega$. Для этого обозначим

$$\nabla_O\mathcal{A}^0 = \frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_0}; \qquad \nabla_O\mathcal{E}_0 = -\frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^0}; \qquad \nabla_O\mathcal{A}^k = \frac{\delta O}{\delta\mathcal{E}_k};$$
$$\nabla_O\mathcal{E}_k = -\frac{\delta O}{\delta\mathcal{A}^k}; \qquad \nabla_O\Theta = \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta^*}; \qquad \nabla_O\Pi_\theta = -\frac{\delta O}{\delta\Theta^*};$$
$$\nabla_O\Theta^* = \frac{\delta O}{\delta\Pi_\theta}; \qquad \nabla_O\Pi_\theta^* = -\frac{\delta O}{\delta\Theta}.$$

По аналогии с алгебраическим подходом доказывается

**Предложение 13** *1. Для калибровочно инвариантной функции $O$ справедливы соотношения $\nabla_O \Lambda_{\mathbf{x}} = 0$ и $\nabla_O \mathcal{E}_0(\mathbf{x}) = 0$ и, таким образом, $\nabla_O X$ является касательным вектором к поверхности* (74).

*2. Справедливо свойство*

$$\Xi O(X) = -\Omega_X[\nabla_O X],$$

По аналогии с алгебраическим подходом исследуется и отношение калибровочной эквивалентности.

**Предложение 14** *Пусть $X$ и $\overline{X}$ — элементы $\mathcal{X}$, связанные соотношением*

$$\begin{gathered}\overline{S} = S, \qquad \overline{\mathcal{A}}^0(\mathbf{x}) = \mathcal{A}^0(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}), \qquad \overline{\mathcal{E}}_0(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{x}),\\ \overline{\mathcal{A}}^k(\mathbf{x}) = \mathcal{A}^k(\mathbf{x}) - \partial_k \alpha(\mathbf{x}), \qquad \overline{\Theta}(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})},\\ \overline{\Theta}^*(\mathbf{x}) = \Theta^*(\mathbf{x}) e^{-i\alpha(\mathbf{x})}, \qquad \overline{\mathcal{E}}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_k(\mathbf{x}),\\ \overline{\Pi_\theta}(\mathbf{x}) = \Pi_\theta(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})}, \qquad \overline{\Pi_\theta}^*(\mathbf{x}) = \Pi_\theta^*(\mathbf{x}) e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\end{gathered} \tag{80}$$

*для некоторых функций $\alpha(\mathbf{x})$ и $\beta(\mathbf{x})$. Пусть также*

$$\overline{v}[a^0, a^k, \vartheta, \vartheta^*] = v[a^0, a^k, \vartheta e^{-i\alpha}, \vartheta^* e^{i\alpha}]. \tag{81}$$

*Тогда квазиклассические состояния $K^h_X v$ и $K^h_{\overline{X}} \overline{v}$ калибровочно эквивалентны.*

Таким образом, на квазиклассическом расслоении определено калибровочное преобразование. Оно переводит $X \mapsto \overline{X}$; функционал $v$ переводится в $\overline{v}$ согласно (81):

$$V_{\overline{X} \leftarrow X} : g \mapsto \overline{g}.$$

**Предложение 15** *1. Дифференциальные формы $\omega$ и $\Omega$ удовлетворяют свойствам*

$$\omega_{\overline{X}}[\overline{\delta X}] = \omega_X[\delta X], \qquad \Omega_{\overline{X}}[\overline{\delta X}] V_{\overline{X} \leftarrow X} = V_{\overline{X} \leftarrow X} \Omega_X[\delta X].$$

*2. Для калибровочно инвариантной функции $O(X)$ справедливо соотношение*

$$\nabla_O \overline{X} = \overline{\nabla_O X}.$$

Исследуем соответствие между квазиклассическими состояниями в методе Гупта–Блейлера и в алгебраическом подходе. Сопоставим квазиклассическому состоянию (72) в методе Гупта–Блейлера квазиклассическое состояние в алгебраическом подходе вида (57), причем

$$g[a^k, \vartheta, \vartheta^*] = v[0, a^k, \vartheta, \vartheta^*]. \tag{82}$$

**Предложение 16** *Пусть $g$ и $v$ связаны соотношением* (82).

*1. Функционал $g$ продолжается на значения $a^0 \neq 0$ как*

$$v[a^0, a^k, \vartheta, \vartheta^*] = e^{-\int d\mathbf{x} a^0(\mathbf{x}) \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \Xi \Lambda_{\mathbf{x}}} g[a^k, \vartheta, \vartheta^*].$$

*2. Скалярные произведения $(g,g)$ и $(v,v)$ вида* (63) *и* (75) *равны.*

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены квазиклассические структуры, возникающие в скалярной электродинамике: расширенное фазовое пространство, квазиклассические состояния и квазиклассическое расслоение, 1-форма $\omega$ и дифференциальная 1-форма $\Omega$, определяемые из соотношения (17), квазиклассические наблюдаемые величины (разложение (18)). Поскольку скалярную электродинамику можно формулировать в рамках квантования в кулоновской калибровке, в алгебраическом подходе и в явно ковариантном методе Гупта–Блейлера, квазиклассические структуры исследованы для всех трех подходов.

Имеется ряд отличий квазиклассической скалярной электродинамики от квазиклассической механики. Прежде всего, расширенное фазовое пространство является поверхностью в пространстве большего числа измерений (уравнение (59) в алгебраическом подходе и система уравнений (74) в подходе Гупта–Блейлера). Скалярное произведение квазиклассических состояний также нетривиально: оно содержит дельта-функции от операторов (соотношение (63)). Еще одна особенность квазиклассической электродинамики заключается в том, что некоторые квазиклассические состояния калибровочно эквивалентны: на квазиклассическом расслоении задано отношение эквивалентности (предложение 8 и 14).

Можно ожидать, что похожие особенности квазиклассической теории будут характерны и для неабелевых калибровочных теорий.


[1] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. (М.: Наука, 1973).
[2] *Завьялов О.И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. (М.: Наука, 1979).
[3] *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. (М.: Наука, 1978).
[4] *Dashen R., Hasslasher B., Neveu A.* Phys. Rev. D. **10**. P. 4114. (1974); *Rajaraman R.* Solitons and Instantons. An Introduction to solitons and instantons in quantum field theory. (North-Holland, Amsterdam, Netherlands,

1982); *Coldstone J., Jackiw R.* Phys.Rev. D. **11**. P. 1486. (1975); *Faddeev L.D., Korepin V.E.* Phys. Rep. **42**. P. 1. (1978).

[5] *Jackiw R.* Rev. Mod. Phys. **49**. P. 681. (1977).

[6] *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. (М.: Атомиздат, 1988).

[7] *Birrell N.D., Davies P.C.W.* Quantum Fields in Curved Space. (Cambridge, UK: University Press, 1982).

[8] *Boyanovsky D., De Vega H.J., and Holman R.* Phys. Rev. D. **49**. P. 2769. (1994).; *Boyanovsky D., De Vega H.J., Holman R., Lee D.S., and Singh A.* Phys. Rev. D. **51**. P. 4419. (1995).

[9] *Cooper F., Mottola E.* Phys.Rev. D. **36**. P. 3114. (1987); *Pi S.-Y., Samiullah M.* Phys. Rev. D. **36**. P. 3128. (1987).

[10] *Jackiw R. and Kerman A.* Phys.Lett. A. **71**. P. 158. (1979); *Cooper F., Pi S.-Y., and Stancioff P.* Phys. Rev. D. **34**. P. 3831. (1986); *Eboli O., Jackiw R., and Pi S.-Y.* Phys. Rev. D. **37**. P. 3557. (1988); *Eboli O., Pi S.-Y., and Samiullah M.* Ann. Phys. **193**. P. 102. (1989).

[11] *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. (М.: Наука, 1987).

[12] *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. (М.: МГУ, 1965).

[13] *Маслов В.П.* Операторные методы. (М.: Наука, 1973).

[14] *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. (М.: Наука, 1977).

[15] *Шведов О.Ю.* Теоретическая и математическая физика. **144**. С. 492. (2005) (*Shvedov O.Yu.* Theoretical and Mathematical Physics. **144**. Issue 3. P. 1296. (2005). DOI: 10.1007/s11232-005-0161-3).

[16] *Шведов О.Ю.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. № 3. С. 8. (2011) (*Shvedov O.Yu.* Moscow University Physics Bulletin. **66**. P. 212. (2011). DOI: 10.3103/S0027134911030180).

[17] *Шведов О.Ю.* Математические заметки. **65**. С. 437. (1999). (*Shvedov O.Yu.* Mathematical Notes. **65**. P. 365. (1999). DOI: 10.1007/BF02675080); *Шведов О.Ю.* Математический сборник. **190**, N 10. С. 123. (1999). (*Shvedov O.Yu.* Sbornik Mathematics. **190**. Issue 9–10. P. 1523. (1999). DOI: 10.1070/SM1999v190n10ABEH000434); *Shvedov O.Yu.* Ann. Phys. **296**. P. 51. (2002).

[18] *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Теоретическая и математическая физика. **104**. С. 479. (1995). (*Maslov V.P., Shvedov O.Yu.* Theoretical and Mathematical Physics. **104**. P. 1141. (1995). DOI: 10.1007/BF02068746).

[19] *Dirac P.A.M.* Lectures on Quantum Mechanic. (Yeshiva Univ., New York, 1965).

[20] *Ashtekar A., Lewandowski J., Marolf D., Mourao J., and Thiemann T.* J. Math. Phys. **36**. P. 6456. (1995); *Giulini D. and Marolf D.* Class. Q. Grav. **16**. P. 2479. (1999).

[21] *Arisue H., Fujiwara T., Inoue T. and Ogawa K.* J. Math. Phys. **22**. P. 2055. (1981).

[22] *Shvedov O.Yu.* Ann. Phys. **302**. P. 2. (2002).

[23] *Gupta S.* Proc. Phys. Soc. A. **63**. P. 681. (1950); *Bleuler K.* Helv. Phys. Acta. **23**. P. 567. (1950).

[24] *Becchi C., Rouet A., and Stora R.* Phys. Lett. B. **52**. P. 344. (1974); *Becchi C., Rouet A., and Stora R.* Ann. Phys. **98**. P. 287. (1976); *Tyutin I.V.* FIAN preprint. N 39. (1975).

[25] *Fradkin E.S. and Vilkovisky G.A.* Phys. Lett. B. **55**. P. 224. (1975); *Batalin I.A. and Vilkovisky G.A.* Phys. Lett. B. **69**. P. 309. (1977).; *Kugo T. and Ojima I.* Suppl. Prog. Theor. Phys. N 66. P. 1. (1979).

[26] *Fulop G.* Int. J. Mod. Phys. A. **11**. P. 4785. (1996).

## Maslov Complex Germ Method for Scalar Electrodynamics

**O. Yu. Shvedov**[a]

*Department of Quantum Statistics anf Field Theory, Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail:* [a]*shvedov@physics.msu.ru*

The main notions of semiclassical scalar electrodynamics are discussed. Different approaches for quantizing scalar electrodynamics are considered. These are Couloumb gauge quantization, refined algebraic quantization and Gupta–Bleuler (or BRST–BFV) quantization. In the semiclassical theory, set of all semiclassical states are viewed as a bundle. The base of the bundle is considered as an extended phase space of the corresponding classical theory. Fibres are quantum states in external background. Semiclassical observables are expressed via differential 1-forms on the extended phase space.

PACS: 03.65.Sq, 11.15.Kc

Keywords: Maslov asymptotic methods, quantum field theory, semiclassical approximation, gauge theories.

Received 02.06.2015.

**Сведения об авторах**

Шведов Олег Юрьевич — кандидат физ.-мат. наук, доцент по специальности «математическая физика», доцент кафедры квантовой статистики и теории поля; тел.: 8 (916) 374 64 18, e-mail: shvedov@physics.msu.ru.