

Теоретическая модель резонатора с поперечным возбуждающим электрическим полем

А. А. Теплых^{1,*}, Б. Д. Зайцев¹, И. Е. Кузнецова²¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Россия, 410019, Саратов, ул. Зеленая, д. 38²Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова, Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, кор. 7

(Статья поступила 12.11.2014; Подписана в печать 28.11.2014)

Разработан метод расчета характеристик акустических колебаний, возникающих в пьезоэлектрическом резонаторе с поперечным возбуждающим электрическим полем. Резонатор представляет собой тонкую пластину из пьезоэлектрического материала, на одну сторону которой нанесены два прямоугольных электрода. Разработанный метод основан на методе конечных элементов и позволяет находить распределение компонент механического смещения в пьезопластине и электрического потенциала в пьезопластине и окружающем ее вакууме при определенной частоте колебаний возбуждающего поля. Кроме того, данный метод позволяет учитывать различные граничные условия на различных областях поверхности пластины, в том числе присутствие демпфирующих слоев. Это позволяет рассчитывать величину реального и мнимого электрического импеданса резонатора в зависимости от частоты. Исследуемый резонатор представлял собой пластину ниобата лития X -среза толщиной 0,5 мм, на верхней стороне которой расположены два электрода шириной 5 мм, ориентированные таким образом, что возбуждающее поле было направлено вдоль кристаллографической оси Y . Были проведены расчеты при различном расстоянии между электродами, в пределах 1–3 мм. Показано, что при увеличении расстояния между электродами резонансная частота незначительно увеличивается, и использование демпфирующего покрытия на внешней стороне электродов позволяет существенно повысить добротность резонатора. Полученные результаты находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными.

PACS: 43.20.+g

УДК:534.2

Ключевые слова: резонатор с поперечным полем, ниобат лития, метод конечных элементов.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с разработкой акустоэлектрических датчиков исследователи обращают особое внимание на пьезоэлектрические резонаторы с поперечным возбуждающим электрическим полем. При разработке такого резонатора [1, 2] возникла необходимость расчета его характеристик. Описанный в [3] метод расчета конфигурации электрического поля в пространстве между электродами резонатора позволил дать качественное описание метода возбуждения акустических колебаний неоднородным электрическим полем. В данной работе разработан метод расчета не только электрического поля, но и акустических колебаний, возникающих в резонаторе, представляющем собой тонкую пластину из пьезоэлектрического материала, на одну сторону которой нанесены два прямоугольных электрода. Разработанный метод основан на методе конечных элементов и позволяет находить распределение компонент механического смещения в пьезопластине и электрического потенциала в пьезопластине и окружающем ее вакууме при определенной частоте колебаний возбуждающего поля. Данный метод позволяет учитывать различные граничные условия на различных областях поверхности пластины и, в частности, описывать механическое демпфирование пара-

зитных колебаний, которое было применено в работах [1, 2]. Это позволило рассчитать реальную и мнимую части электрического импеданса резонатора в зависимости от частоты возбуждающего электрического поля.

1. ЗАДАЧА О ДВМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ АКУСТИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПЬЕЗОСРЕДЕ И ВАКУУМЕ

Рассмотрим пластину из пьезоматериала, ограниченную в направлениях x и y (рис. 1). Будем считать, что граничные условия на разных участках поверхности пластины различаются. Пусть значение переменного во времени электрического потенциала задано на бесконечно тонких электродах $e1$ и $e2$. Особые механические граничные условия заданы в областях $d1$ и $d2$.

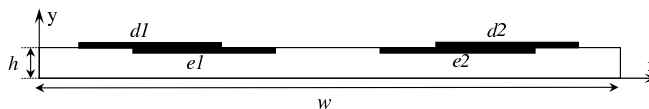


Рис. 1: Геометрия задачи

Вся остальная поверхность пластины полагается механически и электрически свободной, в направлении оси z пластина и электроды полагается безграничными.

*E-mail: teplykhaa@mail.ru

Необходимо найти распределение акустических смещений внутри пластины, а также распределение электрического потенциала внутри пластины и в окружающем ее вакууме. Как известно, внутри пластины эти распределения должны удовлетворять уравнению движения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \quad (1)$$

и уравнению Лапласа для пьезосреды

$$e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad (2)$$

а вне пластины распределение электрического потенциала φ должно удовлетворять уравнению Лапласа для вакуума.

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (3)$$

Здесь ρ — плотность пьезосреды, c_{ijkl} , e_{ijk} , ε_{ij} — тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант пьезосреды, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, u_i — компонента механического смещения, индексы $i, j, k, l = 1..3$. Возбуждающее электрическое поле является переменным и изменяется по гармоническому закону с частотой ω . Поскольку других источников возбуждения колебаний нет и задача линейна, то решение также будет гармоническим. Кроме того, значения переменных не зависят от координаты x_3 . Это означает, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega t \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = 0,$$

а механическое смещение и электрический потенциал можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, y, z, t) &= u_i(x, y) \exp(i\omega t) \\ \varphi(x, y, z, t) &= \varphi(x, y) \exp(i\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и, следовательно, (1–3) можно переписать в виде:

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad (5)$$

$$e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad (6)$$

$$-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad (7)$$

где индексы $i, l = 1..3$, $j, k = 1..2$. Таким образом, эта задача сводится к системе дифференциальных уравнений

$$L(u_i, \varphi) - f = 0, \quad (8)$$

где L — дифференциальный оператор, и заключается в том, чтобы найти величины $u_i(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, которые удовлетворяют (5–7) при заданной ω . Решить эту задачу можно методом конечных элементов, выводя уравнения для элементов при помощи метода Галлеркина. Как показано в [4], применение метода Галлеркина, в сочетании с методом конечных элементов, приводит к системе уравнений

$$\int_R W_\beta (L(u_i, \varphi) - f) dR = 0, \quad (9)$$

где R — двумерная область, в которой нужно получить решение, W_β — система базисных (весовых) функций. Чтобы область R была ограниченной, заключим пьезопластину в круглую область большого радиуса и положим на границе этой области $\varphi = 0$ (рис. 2). Разобьем область решения R на N треугольных двумерных элементов. Для элемента E , соответствующего треугольнику с вершинами $(X_p, Y_p) - (X_q, Y_q) - (X_r, Y_r)$ функция элемента будет иметь вид:

$$W_\beta^E = [a_\beta + b_\beta x + c_\beta y] \quad (\beta = p, q, r)$$

или

$$\left. \begin{aligned} W_p^E &= [(X_q Y_r - X_r Y_q) + (Y_q - Y_r)x + (X_r - X_q)y] / 2A \\ W_q^E &= [(X_r Y_p - X_p Y_r) + (Y_r - Y_p)x + (X_p - X_r)y] / 2A \\ W_r^E &= [(X_p Y_q - X_q Y_p) + (Y_p - Y_q)x + (X_q - X_p)y] / 2A \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где индексы p, q, r обозначают узлы, образующие элемент E , A — площадь элемента E .

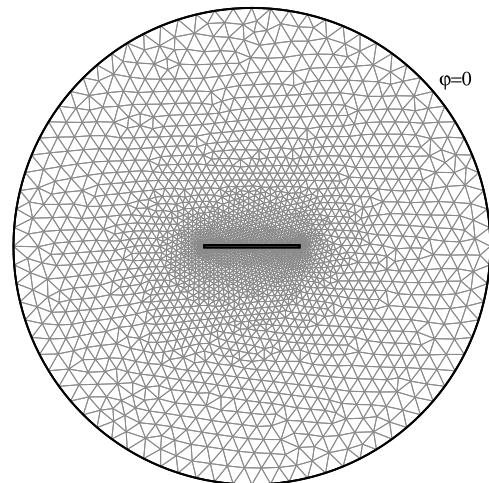


Рис. 2: Общий вид области решения R с разбиением на элементы

Подставляя (5–7) в (9), запишем систему уравнений, которая должна удовлетворяться внутри каждого элемента E из R внутри пластины:

$$\int_E [W]^T \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(c_{i11l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + c_{i12l} \frac{\partial u_l}{\partial y} + e_{1i1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{2i1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{i21l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + c_{i22l} \frac{\partial u_l}{\partial y} + e_{1i2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{2i2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \rho \omega^2 u_i \right) dx dy = 0, \quad (11)$$

$$\int_E [W]^T \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(e_{11l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + e_{12l} \frac{\partial u_l}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e_{21l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + e_{22l} \frac{\partial u_l}{\partial y} - \varepsilon_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) dx dy = 0 \quad (12)$$

и в вакууме вне пластины:

$$- \int_E [W]^T \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) dx dy = 0, \quad (13)$$

где T — операция транспонирования, $u_i = W_p U_i^p + W_q U_i^q + W_r U_i^r$, $\varphi = W_p \Phi^p + W_q \Phi^q + W_r \Phi^r$ — интерполяционные полиномы для двумерного треугольного элемента. Использование метода Галеркина требует, чтобы высший порядок производных, встречающихся в (11–13) был не более чем на единицу выше порядка непрерывности применяемых интерполяционных

соотношений. По этой причине в уравнения (11–13) должны входить производные порядка не выше первого. Применяя метод понижения порядка производных при помощи интегрирования по частям [5], получаем окончательные уравнения, содержащие только сами неизвестные величины и их первые производные в пластине:

$$\int_E [W]^T (\rho \omega^2 u_i) dx dy + \int_B [W]^T \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) n_j dB - \int_E \frac{\partial [W]^T}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) dx dy = 0, \quad (14)$$

$$\int_E \left(\frac{\partial [W]^T}{\partial x_j} \left(e_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \right) dx dy - \int_B [W]^T \left(e_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) n_j dB = 0 \quad (15)$$

и в вакууме:

$$\int_E \left(\frac{\partial [W]^T}{\partial x_j} \left(-\varepsilon_0 \delta_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \right) dx dy - \int_B [W]^T \left(-\varepsilon_0 \delta_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) n_j dB = 0. \quad (16)$$

Здесь B — граница элемента E , n_j — внешняя нормаль к границе. Для того чтобы решение задачи существовало и было единственным, уравнения (14–16) необходимо дополнить граничными условиями. Электрическую часть граничных условий сформулировать легко, т.к. она стандартна для задач такого типа [3]. На границе пьезопластины и вакуума, за исключением регионов $e1$ и $e2$, электрические граничные условия заключаются в непрерывности электрического потенциала и нормальной к границе компоненты электрической индукции:

$$\varphi^p = \varphi^v, \quad D_j^p n_j = D_j^v n_j. \quad (17)$$

Здесь величины с индексом p относятся к пьезопластине, с индексом v к вакууму. На внешней границе Γ области R потенциал равен нулю, а на двух электродах он задан неравным нулю, равным по модулю, но отличным по знаку. В данной работе использовались значения:

$$\varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \varphi|_{e_1} = +1, \quad \varphi|_{e_2} = -1. \quad (18)$$

Механические граничные условия сформулировать труднее. В экспериментах с резонатором с поперечным полем [1, 2], часть поверхности пластины над электродами и вокруг них была покрыта поглощающим лаком. Это было сделано для подавления нежелательных мод колебаний пластины и повышения добротности резонатора. Чтобы отразить этот факт в теоретической модели резонатора, механические граничные условия были сформулированы следующим образом. На поверхности пьезопластины, за исключением регионов $d1$ и $d2$, граничное условие заключается в отсутствии нормальных компонент механического напряжения:

$$T_{ij}n_j = 0. \quad (19)$$

В регионах $d1$ и $d2$, где нанесено демпфирующее покрытие, граничное условие записывается в виде:

$$T_{ij}n_j = i\omega Z_{ij}u_j, \quad (20)$$

где T_{ij} — тензор механических напряжений пьезопластины, n_j — нормаль к поверхности, ω — частота, Z_{ij} — акустический импеданс покрытия, u_j — механическое смещение. Данное условие получено как обобщение известного соотношения [6]

$$p = Zv, \quad (21)$$

где p — акустическое давление, v — колебательная скорость, для газовых и жидких сред на анизотропные твердые тела. При $Z_{ij} \rightarrow 0$ это условие переходит в условие свободной поверхности $T_{ij}n_j = 0$, а при $Z_{ij} \rightarrow \infty$ это условие переходит в условие жестко закрепленной поверхности $u_j = 0$. В рассматриваемом случае $Z_{ij} = Z\delta_{ij}$, где Z — акустический импеданс лака.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОРЕЗОНАТОРОВ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВОЗБУЖДАЮЩИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Для сравнения результатов теории и эксперимента были использованы следующие характеристики резонатора. Резонатор представляет собой пластину X среза ниобата лития, материальные константы взяты из [7]. Толщина пластины $h = 0,5$ мм, ширина $w = 18$ мм (рис. 1). На верхнюю поверхность пластины нанесены два электрода $e1, e2$ шириной 5 мм, зазор между электродами изменялся от 1 до 3 мм с шагом 1 мм. Кроме того, на верхнюю поверхность пластины в области $d1$ и $d2$ нанесено демпфирующее покрытие, ширина областей $d1$ и $d2$ равна 5 мм, зазор между ними изменялся от 2 до 4 мм. Внешняя граница задачи представлена окружностью радиуса 50 мм. Для сравнения с экспериментальными результатами, были проведены

расчеты распределения акустического поля и электрического потенциала в диапазоне $f = 6-7$ МГц. Пример распределения для зазора 1 мм и частоты 6 МГц представлен на рис. 3.

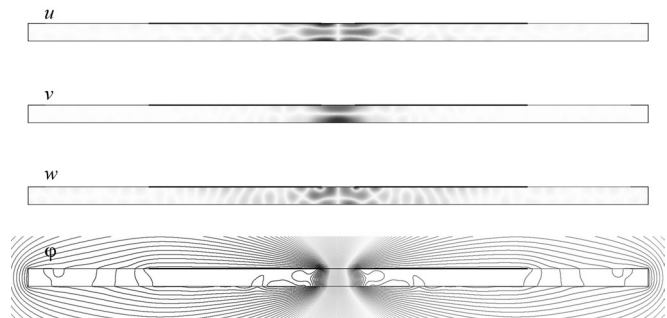


Рис. 3: Распределение компонент механических смещений и электрического потенциала внутри пьезопластины ниобата лития при ее возбуждении поперечным электрическим полем

Хорошо видно, что акустические колебания максимальной амплитуды локализованы в зазоре между электродами. Эти колебания соответствуют продольной акустической волне, распространяющейся в вертикальном направлении и резонирующей между сторонами пластины. Именно эта волна и является причиной глубокого резонанса на частотных зависимостях реальной и мнимой частей электрического импеданса [1, 2]. Видно также, что апертюра этой волны несколько шире зазора между электродами, и на этот факт было обращено внимание в работах [1, 2]. Кроме того отчетливо видно, что в зазоре между электродами возбуждается поперечно-горизонтальная волна первого порядка, которая распространяется в обоих направлениях вдоль оси Y . Очевидно, что поглощающее покрытие вызывает существенное затухание этих волн по мере их распространения и подавляет их резонанс от боковых граней. Видно также, что распределение электрического поля под электродами не является однородным. Этот вывод противоречит результату из [3] и показывает, что при подобных расчетах необходимо учитывать пьезоэффект. Поскольку вышеописанный метод расчета позволяет находить распределение всех переменных и их производных на любой заданной частоте, оказалось возможным построить зависимость электрического импеданса данного резонатора от частоты и сравнить их с экспериментом. На рис. 4, 5, 6 показаны рассчитанные и измеренные значения реальной и мнимой частей импеданса при различной величине зазора между электродами. Расчетное значение импеданса вычислялось по формуле

$$Z = (\varphi_2 - \varphi_1)/J, \quad (22)$$

где $\varphi_2 - \varphi_1$ — разность потенциалов между электродами, J — ток смещения:

$$J = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} ds, \quad (23)$$

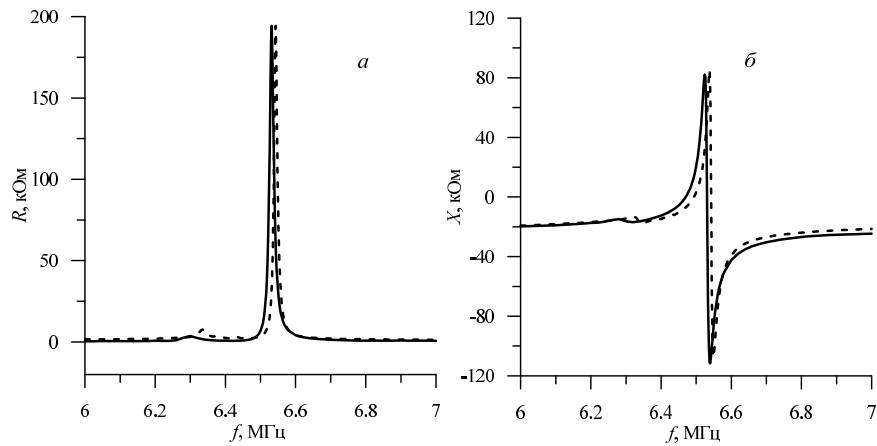


Рис. 4: Теоретическое и экспериментальное значение реальной (а) и мнимой (б) компонент электрического импеданса резонатора с зазором между электродами 1 мм. Сплошная линия — теория, пунктир — эксперимент

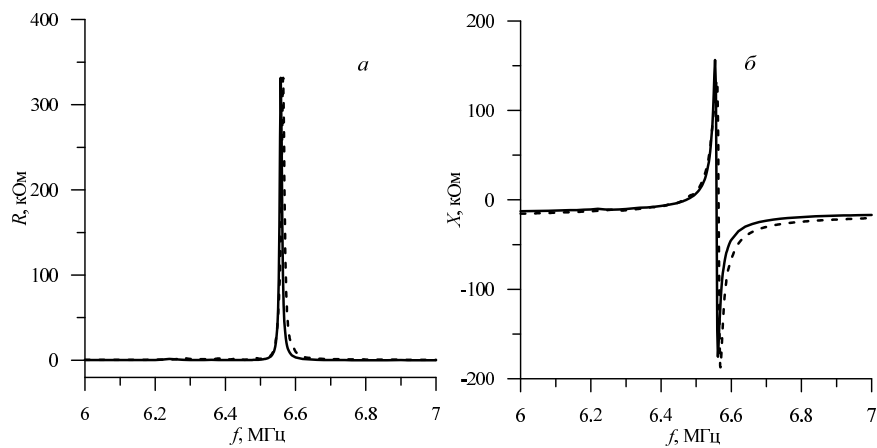


Рис. 5: Теоретическое и экспериментальное значение реальной (а) и мнимой (б) компонент электрического импеданса резонатора с зазором между электродами 2 мм. Сплошная линия — теория, пунктир — эксперимент

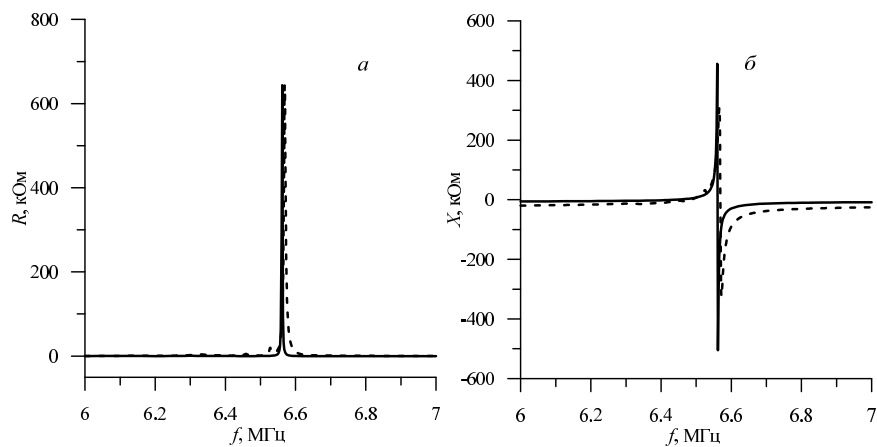


Рис. 6: Теоретическое и экспериментальное значение реальной (а) и мнимой (б) компонент электрического импеданса резонатора с зазором между электродами 3 мм. Сплошная линия — теория, пунктир — эксперимент

интеграл берется по верхней и нижней поверхности электрода. Экспериментальные зависимости реальной и мнимой частей импеданса были получены ранее в ходе выполнения экспериментальных работ [2].

Следует отметить хорошее согласие теоретических и экспериментальных данных. Так, частоты, на которых наблюдается главный максимум R , отличаются не более чем на 15 кГц. Различие в абсолютных значениях X объясняется паразитной электрической емкостью устройства, которая не была учтена в расчете. Представленный в работе метод расчета характеристик резонатора с поперечным возбуждающим электрическим

полем, и полученные результаты будут использованы при создании датчика свойств жидкости.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-5551.2014.9 и гранта РФФИ (проект №12-02-01057а).

-
- [1] Зайцев Б.Д., Кузнецова И.Е., Шихабудинов А.М., Васильев А.А. Письма в ЖТФ. **37**, Вып. 11. С. 27. (2011).
 [2] Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E., Shikhabudinov A.M., Teplykh A.A., Borodina I.A. TUFFC. **61**. N1 P.166. (2014). <http://dx.doi.org/10.1109/TUFFC.2014.6689784>
 [3] Теплых А.А. Нелинейный Мир. **11**, № 2. С.94. (2013).
 [4] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. (М.: Мир, 1979). 392 с.
 [5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. (М.: Наука, 1973). 832 с.
 [6] Лепендин Л.Ф. Акустика. (М.: Высшая школа, 1978). 448 с.
 [7] Slobodnik A.J., Conway E.D., Delmoince R.T. Microwave Acoustics Handbook. **1A**. Surface wave velocities. Scientific Report 1, October 1973.

Theoretical Model of Lateral Electric Field Excited Resonator

A. A. Teplykh^{1,a}, B. D. Zaitsev¹, I. E. Kuznetsova²

¹Saratov Branch of Institute of Radio Engineering and Electronics nm.V.A.Kotelnikov RAS, Saratov, Russia

²Institute of Radio Engineering and Electronics nm.V.A.Kotelnikov RAS, Moscow, Russia

E-mail: ^ateplykhaa@mail.ru

The method of calculation of characteristics of acoustic oscillations existing in piezoelectric electric field excited resonator was developed. The resonator represents thin piezoelectric plate with two rectangular electrodes on one its side. The developed method is based on the finite element analysis and allows to find the distribution of the mechanical displacement components in piezoelectric plate and electrical potential in piezoelectric plate and surrounding vacuum for the given value of frequency of excited field. At that this method allows to consider various boundary conditions on different areas of surface plate including the presence of damping layers. This allows to calculate the real and imaginary parts of electrical impedance as function of frequency. The resonator under study represented the plate of X — cut lithium niobate with thickness of 0.5 mm. Two rectangular electrodes with width of 5 mm were deposited on one side of the plate in such a way that excited electric field was oriented along crystallographic axis Y . The calculations were carried out for different values of width of the gap between electrodes in a range 1–3 mm. It has been shown that the increase in the width of gap leads to insignificant increase in resonant frequency and the use of damping layers on outside parts of electrodes allows significantly increase its Q -factor. The obtained results are in a satisfactory agreement with experimental data.

PACS: 43.20.+g

Keywords: lateral field resonator, lithium niobate, finite element method.

Received 13.11.2014.

Сведения об авторах

1. Теплых Андрей Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; (8452) 27-73-23, e-mail: teplykhaa@mail.ru.
2. Зайцев Борис Давыдович — докт. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией, профессор; (8452) 27-73-23, e-mail: zai-boris@yandex.ru.
3. Кузнецова Ирен Евгеньевна — докт. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, доцент; (495) 629-36-78, e-mail: kuziren@yandex.ru.