

## Исследование возможности существования несимметричных установившихся режимов вынужденных нелинейных колебаний осциллятора с сухим трением

А. В. Фокин\*

АО «Акустический институт имени академика Н. Н. Андреева», Россия, 117036, Москва, ул. Шверника, д. 4  
(Статья поступила 01.12.2014; Подписана в печать 10.12.2014)

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях осциллятора с сухим (кулоновским) трением. Ранее был найден класс несимметричных решений, описывающий установившийся режим вынужденных колебаний. Несимметрия колебаний проявляется в различии амплитуд смещений в противоположных направлениях относительно положения равновесия. Указанный класс решений получен при условии, что длительность одного цикла колебаний равна периоду возбуждающей колебания силы, длительности полуциклов (время движения в противоположных направлениях) равны, отсутствуют остановки ненулевой длительности и смена направления движения на каждом из полуциклов. В данной работе исследуется вопрос о возможности расширения указанного класса решений за счет отказа от условия равенства длительностей полуциклов. Показано, что может существовать лишь два типа решений. Первое решение получено в явном виде, однако численное моделирование для достаточно представительного набора параметров показало, что оно не удовлетворяет условию отсутствия смены направления движения на полуциклах. Для второго типа решений выведено трансцендентное уравнение определяющее длительность полуциклов.

PACS: 43.25.+y

УДК: 534.014

Ключевые слова: осциллятор, нелинейные колебания, вынужденные колебания, сухое трение, кулоновское трение.

Данная работа посвящена исследованию установившегося режима вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением, представляющего собой тело массы  $m$  расположенное на твердой сухой горизонтальной поверхности и соединенное с неподвижной опорой пружиной жесткости  $k$  (рис. 1). Источником возбуждения колебаний осциллятора является гармоническая сила

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где  $F_0$ ,  $\omega$  и  $\varphi_0$  — соответственно амплитуда силы, циклическая частота и начальная фаза. Сила действует непосредственно на тело  $m$  и направлена параллельно горизонтальной поверхности, на которой оно расположено.

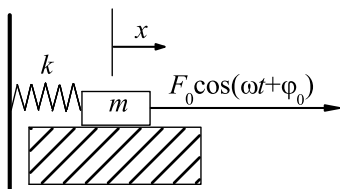


Рис. 1: Осциллятор с сухим трением

Будем предполагать, что вязкое трение отсутствует, а сила сухого трения  $f$  между телом и поверхностью

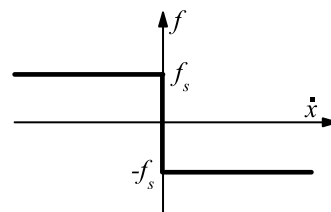


Рис. 2: Кусочно-постоянная модель сухого трения

описывается кусочно-постоянной моделью (закон Кулона) при дополнительном предположении, что максимальная сила трения покоя равна силе трения скольжения  $f_s$  (рис. 2) [1–3]:

$$f = \begin{cases} -f_s \operatorname{sign} \dot{x} & \text{при } \dot{x} \neq 0 \\ -f_s \operatorname{sign}(F(t) - kx) & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |F(t) - kx| > f_s \\ -(F(t) - kx) & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |F(t) - kx| \leq f_s \end{cases} \quad (2)$$

где  $x$  — смещение тела относительно положения занимаемого им, когда пружина не деформирована,  $\dot{x}$  — скорость тела,  $\operatorname{sign} x$  — функция, определяющая знак величины  $x$ . Задача состоит в определении движения тела  $x(t)$ , в зависимости от характеристик осциллятора, параметров возбуждающей колебания силы и начальных данных.

Нелинейный характер силы сухого трения (2), включающий наличие зависимости силы трения покоя от величины внешнего воздействия приводит к тому, что в общем случае движение тела представляет собой последовательность фаз скольжения и фаз покоя. Фазой

\*E-mail: fokin@akin.ru; E-mail: avfokin@mail.ru

скольжения мы будем называть движение тела, при котором его скорость обращается в ноль только в отдельные моменты времени. Соответственно фаза покоя это отсутствие перемещения тела на ненулевом интервале времени. Если интервал времени, на котором ищется решение поставленной выше задачи, разбить на отрезки, соответствующие фазам скольжения в противоположных направлениях и фазам покоя, то на каждом из указанных отрезков смещение  $x(t)$  удовлетворяет линейному неоднородному уравнению, решение которого для рассматриваемого случая гармонического возбуждения находится элементарно. Однако получить аналитическое решение на всем временном интервале, где есть смена фаз движения, возможно только для определенных значений параметров системы и начальных данных, так как моменты времени, соответствующие переходам от одной фазы движения к другой определяются трансцендентными уравнениями.

Как экспериментальные исследования, так и численное моделирование показывают, что вынужденные колебания осциллятора с сухим трением при гармоническом возбуждении, аналогично осциллятору с вязким трением, включают в себя переходный и установившийся режим [4–8]. Динамика переходного режима была рассмотрена в работе [9]. Установившийся режим исследовался в работах [4–7]. В работе [4] был предложен приближенный метод вычисления амплитуды вынужденных колебаний в установившемся режиме, основанный на замене постоянной силы трения покоя эквивалентным вязким трением так, чтобы рассеянная за период энергия была одинакова в обоих случаях. В работах [5,6] было получено точное решение для установившегося режима в предположении, что один цикл колебаний имеет длительность, равную периоду колебаний внешней силы, и состоит из двух симметричных полуциклов равной длительности, соответствующих движению от максимального смещения к равному по модулю минимальному и обратно. Предполагалось, что на каждом из полуциклов направление движения не меняется. Было рассмотрено два случая, когда фаза покоя отсутствует, и когда полуцикл состоит из фазы покоя и фазы скольжения. В первом случае удалось получить аналитическое решение в явном виде. Во втором случае для зависимости амплитуды колебаний от амплитуды и частоты воздействия было выведено трансцендентное уравнение. Подробный анализ полученного в работах [5,6] аналитического решения для случая отсутствия фазы покоя проведен в работе [7]. В частности, получено выражение для сдвига фаз между скоростью и смещением, а также уточнены условия, при которых в установившемся режиме колебаний отсутствует фаза покоя. В работе [8] методом численного моделирования исследуются установившиеся режимы колебаний, содержащие 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 и 14 фаз покоя на одном цикле колебаний.

В работах [10,11] было получено новое точное решение для установившегося режима колебаний при отсутствии фазы покоя. Отличие от полученного в рабо-

тах [5,6] решения заключается в том, что при сохранении равенства длительности двух полуциклов, амплитуды смещения в противоположных направлениях различаются. По сути, найдено не одно решение, а целый класс решений для заданных параметров колебательной системы, различающийся соотношением амплитуд смещения в противоположных направлениях. Указанный класс решений реализуется при достаточно малом трении (требование отсутствия фазы покоя) и частотах возбуждения меньших частоты собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения в четное число раз. Наличие класса решений приводит к тому, что в отличие от резонатора с вязким трением появляется зависимость установившегося режима от начальных данных. Важно отметить, что, как показано в работе [12], при наличии помимо сухого также и вязкого трения, найденный класс решений вырождается в одно симметричное решение, и соответственно зависимость параметров установившегося режима колебаний от начальных данных отсутствует.

Целью данной работы является исследование вопроса о возможности расширения найденного в работах [10,11] класса решений для установившегося режима вынужденных колебаний. Очевидно, что расширение указанного класса, характеризуемого отсутствием фазы покоя и смены направления движения на каждом из полуциклов, возможно только за счет отказа от условия равенства длительности двух полуциклов.

Таким образом, искомый цикл установившегося режима колебаний должен удовлетворять следующим условиям: длительность цикла равна периоду изменения внешнего воздействия; отсутствует фаза покоя; направление движения постоянно на каждом из полуциклов. Началом цикла будем считать момент времени, соответствующий максимальному смещению в положительном направлении оси  $x$ , соответственно скорость в этот момент равна нулю. Для упрощения записи уравнений, определяющих параметры цикла колебаний (условия сшивки решений для двух полуциклов), удобно, как это было предложено в работе [5], условно считать началом цикла момент времени  $t = 0$ . Соответственно силу  $F(t)$  необходимо задать в виде  $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \psi)$ , где  $\psi$  определяет сдвиг фаз между смещением тела  $x(t)$  и силой  $F(t)$ . С учетом этого, используя соотношение (2), получаем уравнение движения тела в фазе скольжения ( $\dot{x} \neq 0$ ):

$$m\ddot{x} + f_s \text{sign} \dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t + \psi). \quad (3)$$

Перейдем в уравнении (3) к безразмерным переменным  $\tau = \omega t$ ,  $\xi = kx/F_0$ :

$$\ddot{\xi} + \delta \beta^2 \text{sign} \dot{\xi} + \beta^2 \xi = \beta^2 \cos(\tau + \psi), \quad (4)$$

где  $\beta = \omega_0/\omega$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — частота свободных колебаний осциллятора в отсутствие трения,  $\delta = f_s/F_0$  — параметр, определяющий относительное влияние сил сухого трения и внешнего воздействия на колебания осциллятора.

Первый полуцикл длительностью  $\tau_h$  представляет собой движение в отрицательном направлении оси  $x$  от максимального смещения  $\xi_r$  до минимального  $\xi_l$ . Смещение тела на первом полуцикле  $\xi_1(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_h$ ) определяется решением уравнения (4) при  $\text{sign } \dot{\xi} = -1$  и начальных данных  $\xi_1(0) = \xi_r$ ,  $\dot{\xi}_1(0) = 0$

$$\xi_1(\tau) = \delta + V \cos(\tau + \psi) + (\xi_r - \delta - V \cos \psi) \cos \beta\tau + (V/\beta) \sin \psi \sin \beta\tau, \quad (5)$$

где  $V = \beta^2/(\beta^2 - 1)$ . Случай резонанса  $\beta = 1$  из рассмотрения исключен. Аналогично определяется движение  $\xi_2(\tau)$  на втором полуцикле ( $\tau_h \leq \tau \leq 2\pi$ ), удовлетворяющее начальным данным  $\xi_2(\tau_h) = \xi_l$ ,  $\dot{\xi}_2(\tau_h) = 0$

$$\begin{cases} \delta + V \cos(\tau_h + \psi) + (\xi_r - \delta - V \cos \psi) \cos \beta\tau_h + (V/\beta) \sin \psi \sin \beta\tau_h = \xi_l, \\ -V \sin(\tau_h + \psi) - \beta(\xi_r - \delta - V \cos \psi) \sin \beta\tau_h + V \sin \psi \cos \beta\tau_h = 0, \\ -\delta + V \cos \psi + (\xi_l + \delta - V \cos(\tau_h + \psi)) \cos \beta(2\pi - \tau_h) + (V/\beta) \sin(\tau_h + \psi) \sin \beta(2\pi - \tau_h) = \xi_r, \\ -V \sin \psi - \beta(\xi_l + \delta - V \cos(\tau_h + \psi)) \sin \beta(2\pi - \tau_h) + V \sin(\tau_h + \psi) \cos \beta(2\pi - \tau_h) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Исключая из системы (8)  $\xi_r$  и  $\xi_l$ , получаем

$$\begin{cases} \sin \beta\pi(\cos \beta\pi \sin(\tau_h + \psi) - \cos \beta(\pi - \tau_h) \sin \psi) = (\delta\beta/V) \sin \beta\tau_h \sin \beta(2\pi - \tau_h), \\ \sin \beta\pi(\cos \beta(\pi - \tau_h) \sin(\tau_h + \psi) - \cos \beta\pi \sin \psi) = (\delta\beta/V) \sin \beta\tau_h \sin \beta(2\pi - \tau_h). \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что в случае равенства длительностей полуциклов ( $\tau_h = \pi$ ) уравнения системы (9) эквивалентны. Приравнявая в (9) правые части, получаем важное соотношение:

$$\sin \beta\pi(\cos \beta\pi - \cos \beta(\pi - \tau_h))(\sin \psi + \sin(\tau_h + \psi)) = 0, \quad (10)$$

из которого следует, что для искомого решения один из множителей в соотношении (10) должен быть равен нулю. Рассмотрим последовательно каждый из трех вариантов.

### Вариант 1

$$\sin \beta\pi = 0. \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует (с учетом того, что случай резонансного возбуждения  $\beta = 1$  из рассмотрения исключен), что для первого варианта решение может существовать лишь для дискретного набора частот возбуждения:

$$\beta = \omega_0/\omega = n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (12)$$

Подставляя соотношение (11) в (9), получаем

$$\begin{aligned} \xi_2(\tau) = & -\delta + V \cos(\tau + \psi) + \\ & + (\xi_l + \delta - V \cos(\tau_h + \psi)) \cos \beta(\tau - \tau_h) + \\ & + (V/\beta) \sin(\tau_h + \psi) \sin \beta(\tau - \tau_h) \end{aligned} \quad (6)$$

Условия сшивки полученных решений для двух полуциклов, представляющие собой непрерывность смещения и скорости, и определяющие параметры цикла ( $\xi_r$ ,  $\xi_l$ ,  $\tau_h$  и  $\psi$ ), имеют вид:

$$\xi_1(\tau_h) = \xi_l, \quad \dot{\xi}_1(\tau_h) = 0, \quad \xi_2(2\pi) = \xi_r, \quad \dot{\xi}_2(2\pi) = 0. \quad (7)$$

Подставляя в систему (7) выражения (5) и (6), получаем

$$\sin \beta\tau_h \sin \beta(2\pi - \tau_h) = 0. \quad (13)$$

С учетом соотношения (12) равенство нулю, как первого, так и второго сомножителя в выражении (13) приводит к одному и тому же соотношению между  $\beta$  и  $\tau_h$ :

$$\beta\tau_h = m\pi, \quad (14)$$

где  $m$  — натуральное число. Объясняется это тем, что  $\tau_h$  и  $2\pi - \tau_h$  это времена движения по первому и второму из полуциклов. Из соотношения (14) следует, что  $\cos \beta\tau_h = \pm 1$ . Рассмотрим оба варианта.

### Вариант 1а: $\cos \beta\tau_h = 1$ .

В этом случае  $\beta\tau_h = 2m\pi$  и, в соответствии с (12), время движения на первом полуцикле определяется соотношением

$$\tau_h = 2m\pi/\beta = (2m/n)\pi. \quad (15)$$

При выполнении соотношений (12), (15) в системе (8) первое уравнение эквивалентно третьему, а второе — четвертому, так что система принимает следующий вид

$$\begin{cases} \xi_r - \xi_l = V(\cos \psi - \cos(\tau_h + \psi)), \\ \sin(\tau_h + \psi) = \sin \psi. \end{cases} \quad (16)$$

Второе уравнение системы, с учетом того, что  $\tau_h \in (0, 2\pi)$ , приводит к следующему соотношению

$$\psi = -\tau_h/2 + (2k + 1)\pi/2, \quad (17)$$

где  $k$  — целое число. Соответственно первое уравнение системы (16) принимает вид

$$\xi_r - \xi_l = 2V \cos \psi = 2V \sin(\tau_h/2 + k\pi). \quad (18)$$

Из (18) следует, что имеется не одно, а целое семейство решений, так как оно определяет не  $\xi_r$  и  $\xi_l$ , по отдельности, а их разность.

**Вариант 1б:**  $\cos \beta\tau_h = -1$ .

В этом случае в системе (8) первое уравнение эквивалентно третьему и система принимает следующий вид

$$\begin{cases} \xi_r + \xi_l - V(\cos(\tau_h + \psi) + \cos \psi) = 2\delta, \\ \sin(\tau_h + \psi) + \sin \psi = 0, \\ \xi_r + \xi_l - V(\cos(\tau_h + \psi) + \cos \psi) = -2\delta. \end{cases} \quad (19)$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (1) системы (19), получаем  $4\delta = 0$ , так что при наличии сухого трения ( $\delta \neq 0$ ) искомого решения не существует.

Таким образом, для варианта 1 в явном виде получены соотношения для параметров несимметричного по времени семейства установившихся режимов вынужденных колебаний (соотношения (12), (15), (17) и (18)). Отметим, что полученное семейство решений, включает в себя найденное ранее семейство, характеризуемое равенством длительностей полуциклов  $\tau_h = \pi$  [10, 11]. Как следует из (15) длительности полуциклов равны для четных  $n$  при соответствующем выборе  $m$ . С учетом соотношений (17) и (18), указанное симметричное по времени семейство решений реализуется при частоте возбуждения  $\omega = \omega_0/2n$ , где  $n = 1, 2, \dots$  и характеризуется следующими значениями параметров цикла:

$$\xi_r = (1 + \varepsilon)V, \quad \xi_l = -(1 - \varepsilon)V, \quad \tau_h = \pi, \quad \psi = 0, \quad (20)$$

где параметр  $\varepsilon = (\xi_r + \xi_l)/(2V)$  характеризует степень несимметрии установившегося режима колебаний ( $\varepsilon = 0$  — симметричный случай).

Вернемся к несимметричному по времени решению. Во-первых, отметим, что в соответствии с (15) для несимметричного по времени решения  $\tau_h \neq \pi$  параметр  $\beta$  может принимать значения  $\beta = 3, 4, \dots$ . Во-вторых, и это главное, чтобы найденный класс несимметричных по времени решений действительно описывал установившийся режим колебаний необходимо

выполнение условий, при которых он был получен, а именно отсутствие фазы покоя и смены направления движения на каждом из полуциклов. Очевидно, что первое условие можно соблюсти при достаточно малом значении параметра  $\delta$  (относительно малая величина сухого трения). Проверка второго условия в общем случае является нетривиальной задачей. В работах [10, 11] эта задача была решена для симметричного по времени решения (20). В явном виде были получены ограничения на параметры системы и параметры установившегося режима колебаний. Величина параметра  $\delta$  и амплитуды  $\xi_r$  и  $\xi_l$  должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\delta \leq 1/(\beta^2 - 1),$$

$$V - \left( \frac{1}{\beta^2 - 1} - \delta \right) \leq \xi_r \leq V + \left( \frac{1}{\beta^2 - 1} - \delta \right),$$

$$-V - \left( \frac{1}{\beta^2 - 1} - \delta \right) \leq \xi_l \leq -V + \left( \frac{1}{\beta^2 - 1} - \delta \right).$$

Для несимметричного как по амплитуде, так и по времени решения (соотношения (12), (15), (17) и (18)) проверка условия отсутствия смены направления движения на каждом из полуциклов проводилась численным моделированием. При этом в качестве параметров системы и начальных условий использовались соотношения (12), (15), (17) и (18). Численное моделирование для достаточно большого набора параметров  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\psi$ ,  $\xi_r$ , определяющих цикл колебаний, показало, что всегда имеется смена направления движения на полуциклах. При этом в случае  $\beta = 2n$  точно или асимптотически устанавливается симметричный по времени и несимметричный по смещению режим колебаний, описанный в работах [10, 11], а при  $\beta = 2n + 1$  симметричный как по времени, так и по смещению режим, при котором на каждом из полуциклов дважды меняется направление движения. В качестве примера на рис. 3 приведены графики расчета смещения  $\xi$  от времени, нормированного на период возбуждающей колебания силы  $T = \omega/2\pi$ , для  $\beta = 4$  и  $\beta = 3$ . Отметим, что в первом случае в крайне правом положении всегда имеется остановка, длительность которой стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, с высокой долей вероятности в случае варианта 1 искомого несимметричного по времени решение отсутствует.

### Вариант 2

$$\cos \beta\pi - \cos \beta(\pi - \tau_h) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет два решения  $\beta\tau_h = 2\pi n$  и  $\beta(2\pi - \tau_h) = 2\pi n$ , где  $n$  — натуральное число. Учитывая, что  $2\pi - \tau_h$  — это длительность второго полуцикла, с точки зрения поиска несимметричного установившегося режима достаточно рассмотреть первое решение. Объясняется это тем, что если в найденном решении считать

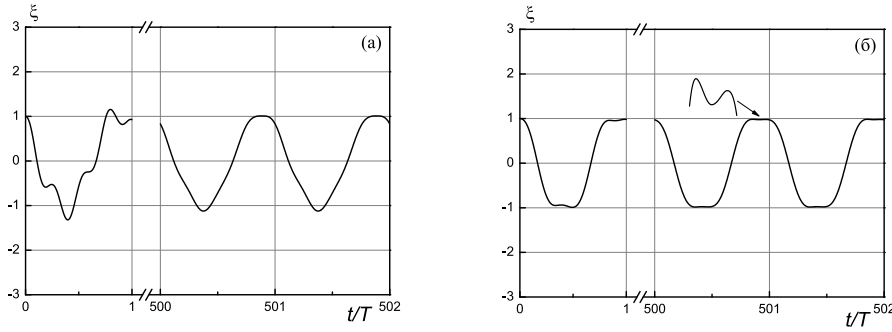


Рис. 3: Результаты численного моделирования колебаний осциллятора для следующих параметров системы и начальных данных: а –  $\beta = \omega_0/\omega = 4$ ,  $\delta = f_s/F_0 = 0,01$ ,  $\xi(0) = \xi_r = 1$ ,  $\varphi_0 = \psi = \pi/4$ , б –  $\beta = \omega_0/\omega = 3$ ,  $\delta = f_s/F_0 = 0,01$ ,  $\xi(0) = \xi_r = 1$ ,  $\varphi_0 = \psi = \pi/6$

началом цикла не максимальное смещение  $\xi_r$ , а минимальное  $\xi_l$ , то  $\tau_h$  заменится на  $2\pi - \tau_h$ . Далее, для определенности, будем рассматривать случай

$$\beta\tau_h = 2\pi n. \quad (22)$$

$$\begin{cases} \xi_r - \xi_l = 2V \cos \psi, \\ -\delta + V \cos \psi + (\xi_l + \delta + \cos \psi) \cos 2\beta\pi + (V/\beta) \sin \psi \sin 2\beta\pi = \xi_r, \\ -V \sin \psi - \beta(\xi_l + \delta + V \cos \psi) \sin 2\beta\pi + V \sin \psi \cos 2\beta\pi = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Исключая из системы (23)  $\xi_r$  и  $\xi_l$ , в итоге получаем уравнение

$$\sin \psi (1 - \cos 2\beta\pi) = 0. \quad (24)$$

Если в соотношении (24) равен нулю первый сомножитель, то в соответствии с (17)  $\tau_h = \pi$ , что соответствует симметричному по времени решению. Равенство нулю второго множителя приводит к соотношению (11). Таким образом, вариант 2 не дает новых решений по сравнению с вариантом 1.

### Вариант 3

$$\sin \psi + \sin(\tau_h + \psi) = 0. \quad (25)$$

Исключая из рассмотрения симметричное по времени решение  $\tau_h = \pi$ , из (25) получаем

$$\psi = -\tau_h/2 + k\pi. \quad (26)$$

Подставляя в первое уравнение системы (9) фазу  $\psi$ , получаем трансцендентное уравнение для  $\tau_h$

$$\begin{aligned} \sin \beta\pi \sin(\tau_h/2)(\cos \beta\pi + \cos(\beta\pi - \tau_h)) = \\ = -(\delta\beta/V) \sin \beta\tau_h \sin \beta(2\pi - \tau_h). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (22) во второе уравнение системы (8), получаем уравнение  $\sin(\tau_h + \psi) = \sin \psi$ , решением которого является соотношение (17). Исключая из системы (8)  $\tau_h$  с помощью соотношения (17), и используя (21), получаем

Решив уравнение (27), мы можем определить фазу  $\psi$  из соотношения (25) и далее вычислить амплитуды  $\xi_r$ ,  $\xi_l$  из системы (8). Подробное исследование возможности существования решения уравнения (27) и соответственно всей системы (8) выходит за рамки данной работы.

Таким образом, проведенное исследование возможности существования несимметричных по времени установившихся режимов вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением позволяет сделать следующие выводы. При условии, что цикл установившихся колебаний не содержит фазы покоя и смены направления движения на каждом из полуциклов, возможны два типа решений. Для первого типа решение получено в явном виде, однако численное моделирование для достаточно представительного набора параметров показало, что оно не удовлетворяет условию отсутствия смены направления движения на полуциклах. Во втором случае решение описывается системой включающей в себя трансцендентное уравнение и вопрос о его существовании остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00579).

- [1] Журавлев В.Ф. ДАН. **433**, № 1 С. 46. (2010).
- [2] Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ. Изд. 2-е, стереотипное. (М.: КомКнига, 2006). 440 с.
- [3] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. (М.: Физматгиз, 1959). 915 с.
- [4] Jacobsen L.S. Trans. A.S.M.E. APM-52-15. P. 169. (1930).
- [5] Den Hartog J.P. Trans. A.S.M.E. APM-53-6. P. 107. (1931).
- [6] Den Hartog J.P. Phil. Mag. **9**, N 59. P. 801. (1930).
- [7] Hong H.-K., Liu C.-S. J. Sound and Vibrat. **244**, N 5. P. 883. (2001).
- [8] Hong H.-K., Liu C.-S. J. Sound and Vibrat. **229**, N 5. P. 1171. (2000).
- [9] Фокин А.В. Сб. трудов XXII сессии Российского акустического общества и Сессии Научного совета РАН по акустике. **I**. С. 208. (М.: ГЕОС. 2010).
- [10] Фокин А.В. Сборник трудов Научной конференции «Сессия Научного совета РАН по акустике и XXIV сессия Российского акустического общества». **I**. С. 138. (М.: ГЕОС. 2011).
- [11] Фокин А.В. Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. Сборник трудов научной школы проф. С.А. Рыбака. Вып. 12. С. 70. (М.: ГЕОС. 2012).
- [12] Фокин А.В. Сборник трудов Научной конференции «Сессия Научного совета РАН по акустике и XXV сессия Российского акустического общества». **I**. С. 192. (М.: ГЕОС. 2012).

## Investigation of the possibility of existence the asymmetrical steady-state nonlinear vibrations of the oscillator with dry friction

A. V. Fokin

*Andreyev Acoustics Institute, Shvernika Str., 4, Moscow, 117036, Russia*  
*E-mail: fokin@akin.ru; avfokin@mail.ru*

Forced vibrations of the oscillator with dry (Coulomb) friction are studied. Earlier the class of asymmetrical decisions describing the steady-state nonlinear vibrations of the oscillator was found. Asymmetry of vibrations is exhibit in distinction of amplitudes in opposite directions. The specified class of decisions is received on the following assumptions: duration of one cycle of vibrations is equal to the period of force exciting vibrations, duration of half-cycles (time of movement in opposite directions) are equal, there are no stops of nonzero duration and change of the movement direction on each of the half-cycles. In this work the question of the possibility of the specified class decisions expansion due to refusal of a condition of equality of half-cycles is investigated. It is shown that there can be only two types of decisions. The first decision is received in an explicit form, however numerical modeling for rather representative set of parameters showed that it doesn't meet a condition of the absence of the movement direction change on each of the half-cycles. For the second type of decisions the transcendental equation determining duration of half-cycles is established.

PACS: 43.25.+y

Keywords: oscillator, nonlinear vibrations, forced oscillation, dry friction, Coulomb friction.

Received 01.12.2014.

### Сведения об авторе

Фокин Андрей Викторович — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, тел.: (499) 723-62-11 (доб. 810), e-mail: fokin@akin.ru, avfokin@mail.ru.