

Слияние широких линий шумового спектра при переходе хаотических пульсаций газовых пузырьков в периодические

Г.А. Дружинин* Т.А. Догадаева
 Санкт-Петербургский государственный университет,
 физический факультет, кафедра радиофизики,
 Россия, С.-Петербург, 190504, ул. Ульяновская, 3
 (Статья поступила 06.11.2014; Подписана в печать 28.11.2014)

Подробно исследованы численные решения уравнения Рэлея–Плессета для пульсаций газового пузырька при плавном увеличении амплитуды давления в акустической волне. Получены картины превращения линейчатого спектра периодических пульсаций в сплошной спектр с широкими спектральными линиями. Изучена динамика поведения этих широких линий и превращения сплошного спектра в линейчатый при слиянии этих широких линий. Построены спектры почти периодических колебаний и обнаружены субгармоники ниже одной восьмой.

PACS: 43.25.Yw, 47.52 УДК: 534-143
 Ключевые слова: пузырьки, колебания, спектры.

Газовый пузырёк в жидкости может пульсировать в поле акустической волны. В литературе встречается множество модельных уравнений, описывающих эти пульсации. Например, уравнение Рэлея–Плессета (1), учитывающее вязкость и сжимаемость жидкости, силу поверхностного натяжения, адиабатическую сжимаемость газа и наличие пара [1].

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c_0} \frac{dR}{dt}\right)} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{3c_0} \frac{dR}{dt}\right) \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{c_0} \frac{dR}{dt}\right) \frac{1}{\rho_0 R} \left(\left(P_0 - P_V + \frac{2\sigma}{R}\right) - \left(P_0 - P_V + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + P_m \sin \omega_0 t \right) + \frac{4\mu}{R^2} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{R\rho_0 c_0} \frac{dR}{dt} \left(3\gamma \left(P_0 - P_V + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} \right) \right\}. \quad (1)$$

Здесь R — радиус пузырька, P_0 — атмосферное давление, P_V — давление пара, P_m — амплитуда давления в синусоидальной акустической волне накачки, ρ_0 — плотность жидкости, μ — кинематическая вязкость.

Использование метода Рунге–Кутты четвёртого порядка с переменным шагом и оригинальной программы, написанной на языке C++, позволило получить достаточно точные решения уравнения Рэлея–Плессета. По временным зависимостям радиуса пузырька были построены спектры его пульсаций для медленно увеличивающихся значений амплитуды акустической волны.

Мы исследовали несколько моделей колебаний газовых пузырьков и во всех случаях с увеличением ам-

плитуды волны накачки — вынуждающей силы — синусоидальные колебания становятся нелинейными, появляются высшие гармоники. Затем появляются субгармоники, чаще всего первой появляется субгармоника $1/2 \omega_0$, и дальше субгармоники размножаются через бифуркации [2].

На рис. 1 представлены результаты одного из численных решений уравнения Рэлея–Плессета: временная зависимость периодических колебаний стенки газового пузырька, а также линейчатый спектр, соответствующий таким колебаниям. На спектре видно, что преобладающей является субгармоника $1/2$, основная гармоника уступает ей по высоте. Совершенно отчетливо видны субгармоники $1/4$ и $3/4$, а субгармоники, кратные $1/8$ еле заметны. Мы интересовались только субгармонической частью спектра.

Однако в некоторых случаях размножение начинается через трифуркации, то есть первыми возникают субгармоники $1/3$ и $2/3$, а период утраивается (рис. 2).

На рис. 3 представлены временная зависимость и спектр колебаний стенки газового пузырька, и по спектру видно, что колебания уже не периодические. При увеличении давления в волне на 0,1 атм (по сравнению с рис. 1) спектральные линии субгармоник $1/4$ и $3/4$ расширились и спектр стал сплошным. Субгармоника $1/2$ так же, как в предыдущем решении, больше основной гармоники.

На рис. 4 представлены временная зависимость и спектр, соответствующие хаотическим колебаниям стенки газового пузырька в акустическом поле. Спектр совершенно сплошной, выделяется на этот раз основная гармоника, а окрестность субгармоники $1/2$ представляет собой широкую линию. Колебания не периодические, поэтому их спектры всё время разные. Сравнить эти изменчивые спектры хаотических колебаний при разных частотах и при разных давлениях в волне накачки неплототворно.

В связи с тем, что существует переходной процесс, первые 168 периодов колебаний мы пропускали. Верхний спектр на рис. 4 был рассчитан по вторым 168

*E-mail: gd45gd@gmail.com

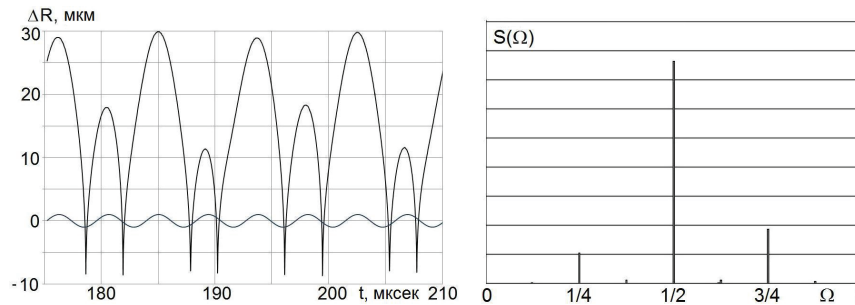


Рис. 1: Слева временная зависимость изменения радиуса пузырька и давление в акустической волне. $R_0 = 10 \mu\text{m}$, $P_m = 2,6 \text{ атм}$, $\omega_0 = 0,7\omega_{res}$. Здесь ω_{res} — резонансная частота линейных пульсаций пузырька, $\Omega = \omega_0/\omega_{res}$. Справа линейчатый спектр, соответствующий периодическим колебаниям радиуса пузырька. График колебаний повторяется через четыре периода синусоидальной вынуждающей силы

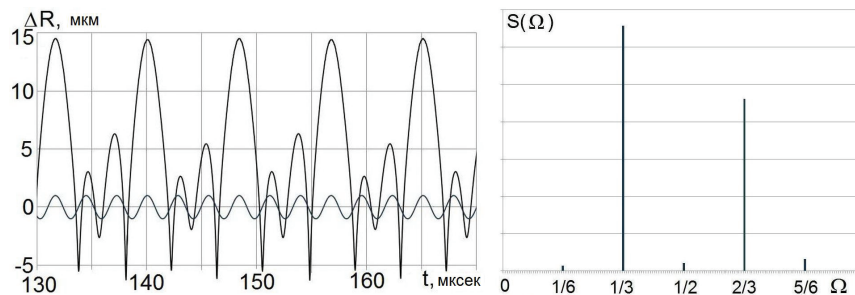


Рис. 2: Слева временная зависимость изменения радиуса пузырька и давление в акустической волне. $R_0 = 10 \mu\text{m}$, $P_m = 1,7 \text{ атм}$, $\omega_0 = 1,1\omega_{res}$. Справа линейчатый спектр, соответствующий периодическим колебаниям радиуса пузырька. График колебаний повторяется через 6 периодов синусоидальной вынуждающей силы. Спектр линейчатый

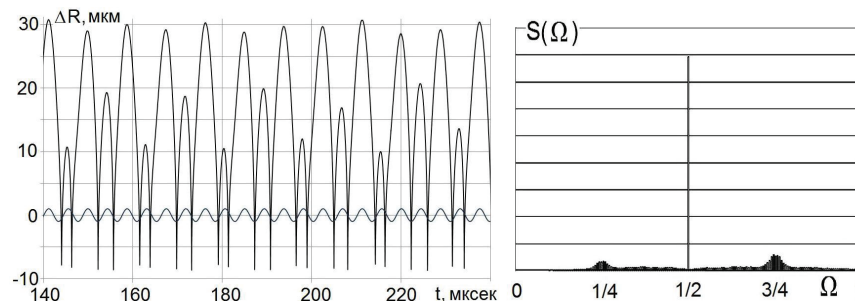


Рис. 3: Слева временная зависимость изменения радиуса пузырька. Справа сплошной спектр, соответствующий почти периодическим колебаниям радиуса пузырька. $R_0 = 10 \mu\text{m}$, $P_m = 2,7 \text{ атм}$, $\omega_0 = 0,7\omega_{res}$

периодам вынуждающей силы. Затем был рассчитан спектр по следующим (третьим) 168 периодам вынуждающей силы. Спектр этой зависимости показан в нижней части рисунка. Видно, что они отличаются друг от друга. Если сравнивать эти спектры и дальше, то все они будут уникальными.

Для серий сплошного спектра было замечено, что если вычислить подряд несколько спектров, сложить спектральные составляющие с одинаковыми номерами и разделить на количество спектров, то полученный усреднённый спектр получается на вид гораздо более гладким, чем отдельные спектры.

В ходе накопления и усреднения спектров получены оригинальные результаты для количества накопленных сплошных спектров $N_{spec} = 10, 100, 1000, 10000$. Последние два усреднённых спектра уже почти не отличаются друг от друга. Из анализа накопленных спектров был сделан вывод о том, что нерационально накапливать больше двухсот спектров (рис. 5).

Замечено, что спектры хаотических колебаний имеют разную форму. В некоторых случаях дискретные линии линейчатого спектра при изменении амплитуды волны накачки уширяются, и их форма иногда напоминает оптические спектры разреженных газов. При этом формально спектр сплошной, но на нём явно выделя-

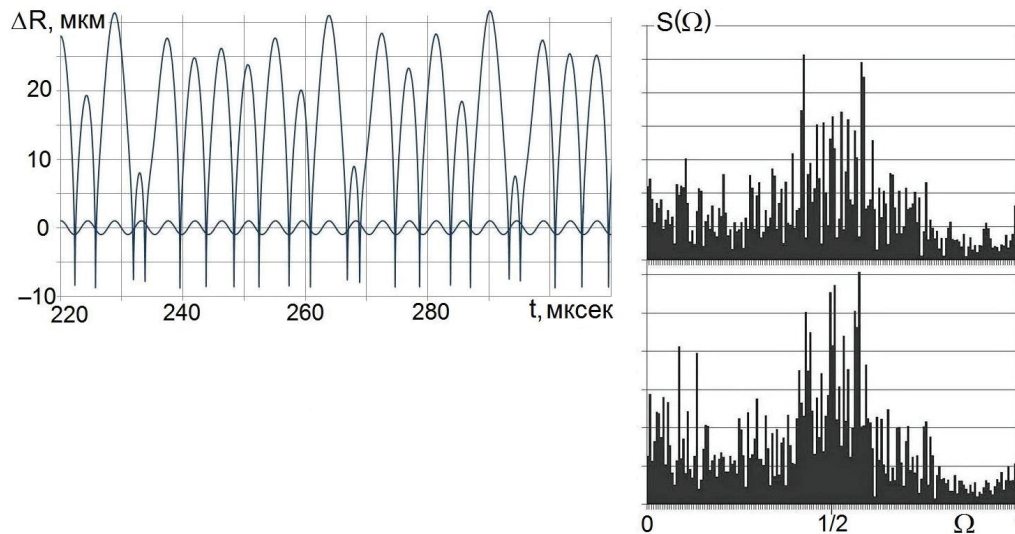


Рис. 4: Слева временная зависимость изменения радиуса пузырька. Справа сплошной спектр, соответствующий хаотическим колебаниям пузырька. Показаны спектры последовательных вычислений на 168 периодах волны накачки. Ω — безразмерная частота, $\Omega = \omega/\omega_{res}$. $R_0 = 10$ мкм, $P_m = 2,9$ атм, $\omega_0 = 0,7\omega_{res}$

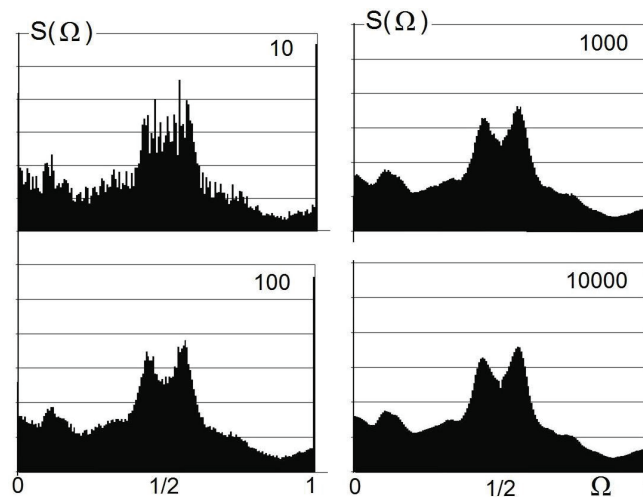


Рис. 5: Серия спектров пульсаций газового пузырька в жидкости с переменным числом накоплений. Количество усредняемых спектров $N_{spec} = 10, 100, 1000, 10000$. $\Omega = \omega/\omega_{res}$. $R_0 = 10$ мкм, $P_m = 2,9$ атм, $\omega_0 = 0,7\omega_{res}$

ются отдельные дискретные линии и широкие горбы. В некоторых случаях эти линии расширяются, и спектр может состоять из отдельных дискретных линий и широких горбов.

Для поиска закономерностей изменения формы спектров были вычислены и построены трёхмерные диаграммы зависимости формы накопленного спектра от амплитуды вынуждающей силы (акустического давления).

На рис. 6 можно наблюдать переход от хаотических колебаний к периодическим и от периодических к хаотическим. Стоит отметить, что даже при шаге увеличения давления 0,01 атм переходы происходят совсем не постепенно. При амплитуде вынуждающей силы $P_m = 2,34$ атм спектр является совершенно сплошным

и имеет несколько пиков. Но уже при $P_m = 2,35$ атм спектр становится линейчатым с преобладающими субгармониками $1/3$ и $2/3$.

Переход от периодических колебаний к хаотическим также нельзя назвать плавным или постепенным. Ещё при $P_m = 2,39$ атм спектр является линейчатым с ярко выраженными субгармониками, кратными $1/6$. С увеличением P_m до 2,4 атм наблюдается сильное уширение спектральных линий $1/6$, $1/2$ и $5/6$, а линии $1/3$ и $2/3$ остаются дискретными.

На следующем шаге, при $P_m = 2,41$ атм спектр становится совершенно сплошным, с пиками в окрестности субгармоник $1/3$ и $2/3$ и провалом на субгармонике $1/2$.

Особый интерес на данном промежутке изменения

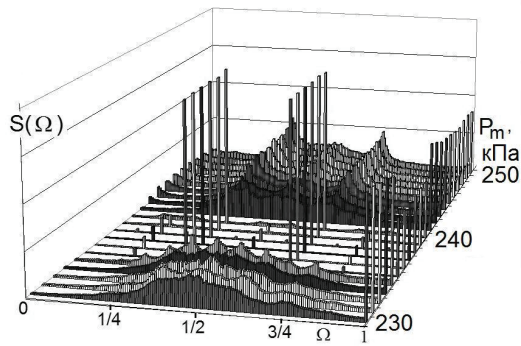


Рис. 6: Серия накопленных спектров решений уравнения Рэлея-Плессета с переменным давлением. По оси абсцисс отложена безразмерная относительная частота $\Omega = \omega/\omega_{res}$. По оси ординат отложена спектральная плотность. Частота волны накачки $\omega_0 = 0,9\omega_{res}$. Изменение амплитуды вынуждающей силы P_m от 2,3 атм до 2,5 атм с шагом 0,01 атм

акустического давления представляет спектр, полученный при $P_m = 2,38$ атм и представленный на рис. 7. На этом спектре впервые отчетливо видны субгармоники, кратные $1/12$, хотя ранее мы не наблюдали субгармоник меньше $1/8$.

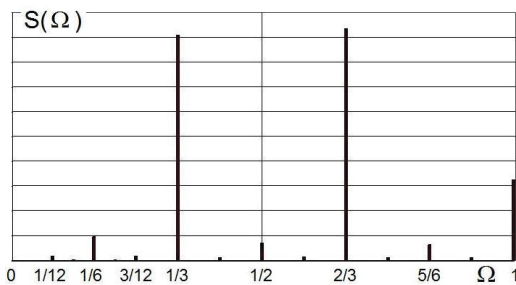


Рис. 7: Спектр колебаний стенки газового пузырька в акустической волне с частотой $\omega_0 = 0,9\omega_{res}$. Амплитуда вынуждающей силы $P_m = 2,38$ атм

На рис. 8 показана серия спектров решений уравнения Рэлея-Плессета в промежутке изменения акустического давления P_m от 3,1 атм до 3,3 атм с шагом 0,01 атм. Здесь можно наблюдать два удавшихся случая перехода от хаоса к периодическим пульсациям и один почти удачный. При давлении $P_m = 3,19$ и 3,20 атм пульсации становятся почти периодическими (см. рис. 9), спектр почти линейчатый, но всё же хаос побеждает. Особенностью этих пульсаций является то, что здесь реализуется редкая форма почти периодических колебаний с пятикратным периодом.

Как правило, переход от периодических пульсаций с линейчатым спектром к хаотическим, со сплошным, происходит через удвоение или реже через утроение периода. При дальнейшем увеличении давления в волне накачки спектр приобретает форму, характерную для оптических спектров. В спектре возникают широкие линии, среди которых обязательно присут-

ствует дискретная линия вынуждающей силы.

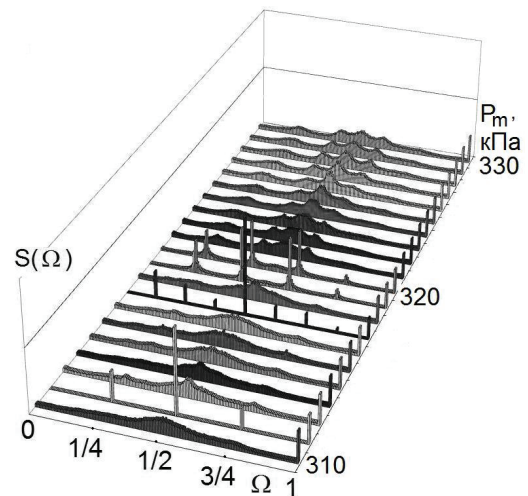


Рис. 8: Серия накопленных спектров решений уравнения Рэлея-Плессета с переменным давлением. По оси абсцисс отложена безразмерная относительная частота $\Omega = \omega/\omega_{res}$. По оси ординат отложена спектральная плотность. $\omega_0 = 0,9\omega_{res}$. Изменение амплитуды вынуждающей силы P_m от 3,1 атм до 3,3 атм с шагом 0,01 атм

На рис. 10, 11 и 12 представлена история «движения» широких линий сплошных спектров при увеличении давления. Правый график рис. 10 иллюстрирует процесс перехода спектра из четырёх дискретных линий в четырёхгорбый сплошной спектр, в котором частоты боковых линий не кратны $1/4$. Эти линии сближаются и «гасят» половинную частоту. Дальше, сближение этих широких линий приводит к уменьшению «провала» между ними. В момент слияния вдруг возникает дискретная линия субгармоники $1/2$ и спектр становится линейчатым, а пульсации — периодическими.

Переход к хаосу при разных частотах акустической волны накачки происходит при давлениях P_m около 2 атм. Давления перехода от хаоса к периодическим колебаниям на разных частотах могут сильно отличаться.

На других частотах переход от хаоса к периодическим колебаниям происходит похожим образом (см. рис. 11 и 12). Широкие линии (горбы) сходятся, расходятся, но когда при сближении двух максимумов пропадает минимум между ними, широкие линии сливаются, образуется дискретная линия, а спектр становится линейчатым.

Для наблюдения за движением широких линий на рис. 11 и 12, справа, приведён вид сверху на трёхмерные спектры. Максимумы спектральной плотности помечены точками. Эволюция спектров при частоте акустической волны $\omega_0 = 0,9\omega_{res}$ довольно сложная, движения максимумов загадочны, но хаос заканчивается тем же слиянием широких линий.

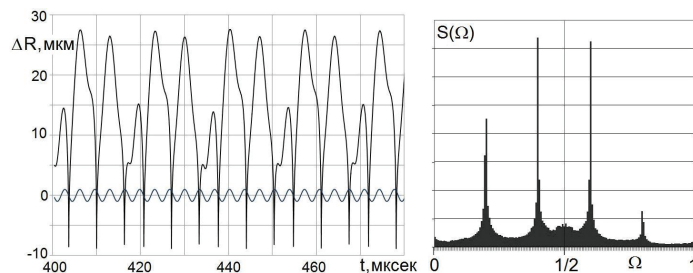


Рис. 9: Временная зависимость и спектр почти периодических колебаний газового пузырька в акустическом поле. Амплитуда вынуждающей силы $P_m = 3,2$ атм, $\omega_0 = 0,9\omega_{res}$

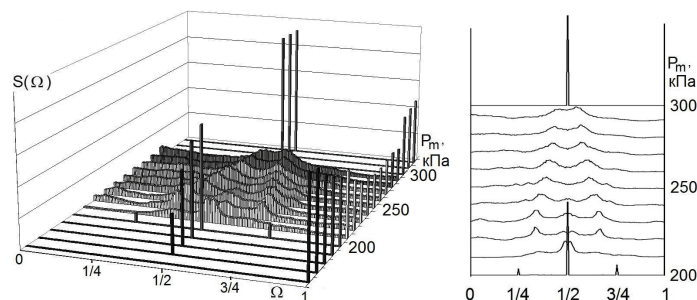


Рис. 10: Спектры пульсаций газового пузырька при амплитудах волны накачки от 1,6 до 3,2 атм, на частоте $\omega_0 = \omega_{res}$. Справа — огибающие этих спектров

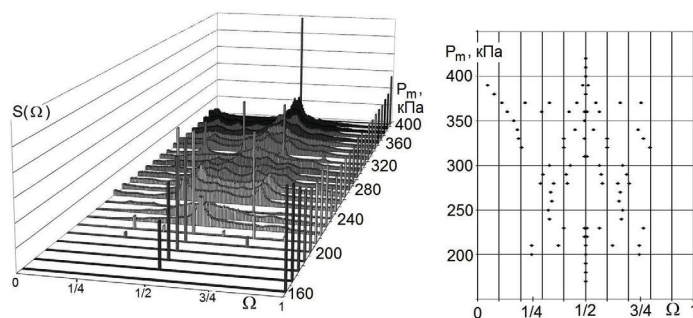


Рис. 11: Спектры пульсаций газового пузырька при амплитудах волны накачки от 1,5 до 4,2 атм, на частоте $\omega_0 = 0,9\omega_{res}$. Справа — картина максимумов этих спектров, расположенных ниже основной гармоники

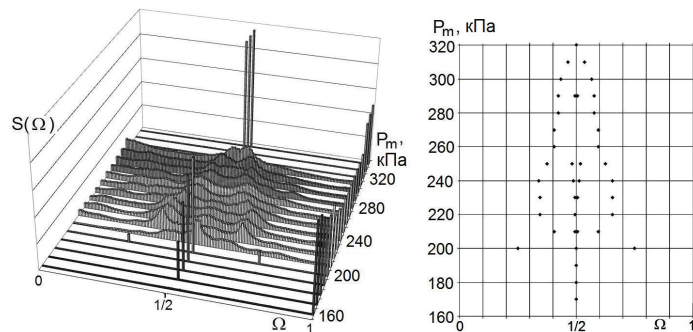


Рис. 12: Спектры пульсаций газового пузырька при амплитудах волны накачки от 1,5 до 4,2 атм, на частоте $\omega_0 = 0,98\omega_{res}$. Справа — картина максимумов этих спектров, расположенных ниже основной гармоники

- [1] Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К., Топольников А. С. [2] Дружинин Г.А. Акуст. ж. №5. С. 740. (2008).
ПМТФ, 43, № 1. С. 52. (2002).

Broad lines of the noise spectrum merge in transition of chaotic bubble oscillations to periodic ones

G. A. Druzhinin^a, T. A. Dogadaeva

Department of Physics, St.Petersburg State University, St. Petersburg, St. Peterhof, 198504 Russia
E-mail: ^agd45gd@gmail.com

Numerical solutions of the Rayleigh–Plesset equation of gas bubble pulsations under slow increasing pressure amplitude of acoustic pump wave were thoroughly investigated. 3D diagrams of transformation of discrete spectrum of periodic pulsations in a continuous spectrum with broad spectral lines have been obtained. Dynamics of behavior of these broad lines and of conversion of continuous spectrum in a discrete one at the confluence of these broad lines has been investigated. Spectra that corresponded to almost periodic oscillations were detected and subharmonics under 1/8 were found.

PACS: 43.25.Yw, 47.52

Keywords: bubbles, oscillations, spectra.

Received 06.11.2014.

Сведения об авторах

1. Дружинин Григорий Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. радиофизики СПбГУ; тел.: +7 (904) 609-88-43, e-mail: gd45gd@gmail.com.
2. Догадаева Татьяна Александровна — студентка каф. радиофизики СПбГУ тел.: +7 (911) 153-87-72, e-mail: aysel510@ya.ru.