

Сильно нелинейные явления в акустике

О.В. Руденко*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 13.11.2014; Подписана в печать 03.12.2014)

Указано на отличие сильно нелинейных волн от волн с сильно выраженной слабой нелинейностью. Дана классификация сильно нелинейных систем. Описаны простейшие структурные особенности метаматериалов, обладающих высокой нелинейностью. Приведены примеры математических моделей, обладающих достаточной общностью и представляющих интерес для физики нелинейных волн. Указано на корпускулярные свойства сингулярных решений и на ряд необычных явлений, примерами которых служат волновая аккреция, самозахват и саморасщепление волн.

PACS: 02.30.Jr, 05.45.-a, 43.25.+y, 43.25.-x, 47.35.De, 47.40.Nm УДК: 534.222

Ключевые слова: сильная нелинейность, нелинейные мета-материалы, самозахват, саморасщепление, устойчивые ударные волны сжатия и разрежения, трапециевидная пилообразная волна.

ВВЕДЕНИЕ

Обсуждаемое направление связано с общими вопросами теории волн, а также с конкретными проблемами акустики, лазерной физики, физики экстремальных состояний вещества, и, кроме того, с рядом технических проблем, где достигаются очень высокие плотности энергии.

Для акустики и ее приложений не менее интересен другой случай, когда сильно нелинейные явления реализуются не благодаря чрезвычайно высокой интенсивности поля, а при умеренных интенсивностях, из-за очень большой нелинейности среды. Существуют примеры таких сред — как природных, так и созданных искусственно. Однако систематические исследования волновых явлений в средах с гигантскими нелинейностями не проводились, хотя существуют обзоры на близкие темы [1–5].

Сегодня, по-видимому, уже имеет смысл говорить о целенаправленном создании нелинейных метаматериалов с контролируемой структурой и свойствами. В них могут быть сравнительно легко (с помощью стандартной аппаратуры) организованы процессы обмена энергией между волнами разных частот, реализован весь спектр известных нелинейных эффектов, используемых для решения практических задач. Кроме того, можно наблюдать принципиально новые явления.

1. ВОЛНЫ: СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫЕ И СЛАБЫЕ С СИЛЬНО ВЫРАЖЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Обратим внимание на то, что следует различать сильно- и слабо нелинейные волны. Когда в профиле волны, прошедшей расстояние порядка сотен или тысяч длин волн, образуются ударные фронты, это — слабый эффект, который сильно выражен. При этом

акустические давления — порядка 10^5 – 10^6 Па, то есть много меньше характерного внутреннего давления, равного для воды $2,2 \times 10^9$ Па. Иная ситуация возникает при наличии зародышей кавитации, когда волна может «разорвать» среду. Взрывная волна также сильно нелинейна. Она разрушает среды. При ядерных взрывах даже образуются новые химические элементы. Итак, нужно ответить на вопрос: сильный или слабый — а по сравнению с чем? Если волна (ее спектр, форма) сравнивается сама с собой в начальный момент и при этом наблюдается заметное различие, можно говорить о сильно выраженной слабой нелинейности. Если же поле волны сравнивается с характерным полем в среде и при этом оба значения близки, можно говорить о сильной нелинейности. Большинство традиционных задач физики нелинейных волн имеет дело со слабо нелинейными волнами, для которых определяющие уравнения могут быть разложены в степенные или функциональные ряды. Примером может служить разложение адиабаты по степеням возмущений плотности и давления. Однако разложения в ряд нельзя использовать, по крайней мере, в трех случаях.

1. Когда определяющие соотношения содержат особенности. Примером служит Герцевская нелинейность структурно-неоднородных сред, а также нелинейность виброударных систем.
2. Когда разложения расходятся в очень сильных полях, достигаемых, например, при механических взрывах или в полях петаваттных лазеров. Обычно такие поля с механическим напряжением порядка модуля упругости или с напряженностью электрического поля порядка внутриаомной разрушают среду или необратимо изменяют ее свойства. Сверхсильные световые поля могут даже изменить свойства вакуума.
3. Когда в разложениях отсутствует линейный член, зато доминирует одна из высших нелинейностей. Такие модели известны в квантовой теории поля и в механике.

*E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

В работах [3–5] даны примеры сосредоточенных и распределенных систем первого, второго и третьего типа. Показано, что создание сильных полей связано с нелинейной локализацией энергии. Рост плотности энергии и вещества обычно состоит из этапов, ограниченных эффектами насыщения или развитием неустойчивости.

2. О НЕЛИНЕЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

Нелинейные метаматериалы по этой классификации обычно могут быть отнесены к сильно нелинейным системам первого и третьего типа. Однако некоторые из них могут содержать высокооборотные колебательные элементы, способные накопить значительную энергию; такие материалы удобно отнести ко второму классификационному типу.

Пример среды с особенностью, присутствующей в определяющих уравнениях, дан на рис. 1а, б.

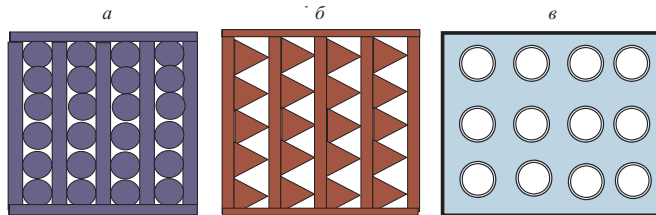


Рис. 1: Зернистая среда с элементами типа сферических контактов Герца (а), заостренных контактов (б), а также резиноподобная среда с «вмороженными» пузырьками газа (в)

На рис. 1а изображена зернистая структура, элементы которой контактируют по закону Герца. Как известно, такой элемент реализуется при контакте шаров между собой или шара с плоскостью. Площадь соприкосновения увеличивается с ростом сжимающего усилия, то есть контакт ведет себя как нелинейная пружина. Если в исходном состоянии шары лишь касаются друг друга, приложенная сила F приводит к сближению их центров по закону $F \sim (\xi_1 - \xi_2)^{3/2} \theta(\xi_1 - \xi_2)$. Эта зависимость не имеет линейного участка при сколь угодно малых смещениях, то есть колебания под действием осциллирующей силы будут сильно нелинейными. Нелинейные свойства такой гранулированной среды ослабевают, если контакт «поджать» статическим усилием. Качественно ситуация не изменится, если форма контактов будет иной (рис. 1б). При слабом поджатии в фазе разрежения шары расходятся (контакты разрываются), а в фазе сжатия — соударяются. О таком механизме говорят как о «хлопающей» нелинейности.

На рис. 1в изображены сферические газовые включения, помещенные в жидкость или в матрицу типа «soft solid» — гель или резиноподобный метаматериал с малым модулем сдвиговой упругости. Добротность коле-

баний «вмороженного» пузырька равна [6]:

$$Q = \frac{c_L}{2c_T} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{c_G^2 \rho_G}{c_T^2 \rho_0} \right)^{-1/2}.$$

Она выражается через скорость звука в газе c_G и его плотность ρ_G , а также скорость продольной c_L и поперечной c_T волн в геле и его плотность ρ_0 . Эта добротность для сред «soft solid» велика, а в жидкости при $c_T \rightarrow 0$ достигает значения $Q = (c_L/c_G)(\rho_0/3\rho_G)^{1/2}$. Для воды с пузырьками воздуха $Q \sim 100$. Если пузырьки помещены в резонатор с малыми потерями, добротность еще выше. Это означает, что возбуждающие колебания внутри резонатора усилятся в Q раз и нелинейные явления будет легче наблюдать. К тому же нелинейность жидкости с пузырьками оценивается величиной ~ 5000 , в то время как нелинейность чистой воды ~ 4 , а воздуха $\sim 1,2$.

Сильно сжимаемые элементы, создающие высокую нелинейность, имеются и в естественных средах. На рис. 2а изображен образец сланца. Трещины в таких породах бывают частично заполнены водой или жидкими углеводородами. В них остается и газовая фракция, создающая высокую сжимаемость (рис. 2б). Такая структура может моделироваться цепочками резонаторов Гельмгольца (рис. 2в).

3. РЕШЕТКА С СИЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ — ПРИМЕР СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Еще одна сильно нелинейная механическая модель изображена на рис. 3. Она представляет собой систему со связями. Массы (шарики) могут двигаться лишь вдоль направляющих стержней, параллельных оси x . Пружинки, соединяющие ближайших соседей в трех измерениях, являются линейными и подчиняются закону Гука. В равновесном состоянии пружинки не деформированы.

Уравнение движения для такой цепочки в континуальном приближении, когда длина волны велика по сравнению с расстоянием между атомами, дается уравнением

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{3}{2} c^2 \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right],$$

$$c = \frac{ka^2}{m}.$$

Здесь ζ — смещение вдоль x массы m , коэффициент жесткости пружинки равен k . Из этого уравнения следует, что продольная плоская волна вдоль x распространяется со скоростью c , а поперечная волна, бегущая, например, вдоль оси y , обнаруживает сильно нелинейное поведение. Она описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 U^3}{\partial y^2}.$$

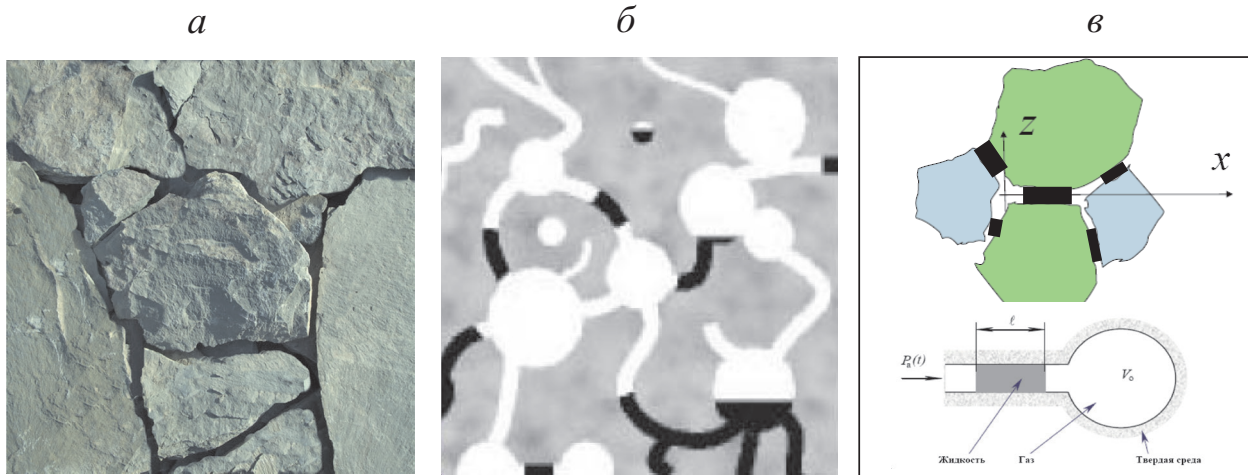


Рис. 2: Зернистая структура сланца (а), эквивалентная модель (б) с порами, частично заполненными жидкостью, и ее представление системой связанных резонаторов Гельмгольца (в)

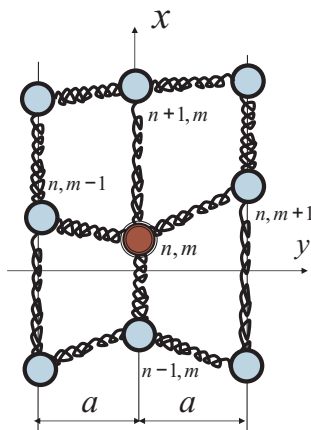


Рис. 3: Узел кристаллической решетки, связанный Гуковскими пружинками с ближайшими соседями, может двигаться лишь вдоль оси x и обнаруживает сильно нелинейное поведение

Здесь $U = \partial \zeta / \partial y$ — деформация. Это уравнение описывает нераспространяющуюся (стоячую) волну. Детали, связанные со свойствами его решений, частично изложены в работах [7, 8].

4. КВАДРАТИЧНО КУБИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА БЮРГЕРСА

Остановимся теперь на уравнении с особенностью, которая имеется при нулевом значении возмущения $V = 0$. Поэтому нелинейность не исчезает даже при бесконечно малой величине возмущения и по классификации [3] является сильной, первого типа.

Это уравнение типа Бюргерса, но с так называемой квадратично кубической (QC) нелинейностью [7]:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (|V| V) + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

Это адекватная модель для волн в ряде материалов. Кроме того, уравнение удобно для качественного описания волн в кубично нелинейных средах. Замена истинной кубичной нелинейности V^3 на QC-модель $|V| V$ радикально упрощает анализ многих задач. Уравнение замечательно тем, что допускает точную линеаризацию.

На рис.4 показан процесс формирования ударных фронтов сжатия и разрежения в QC среде.

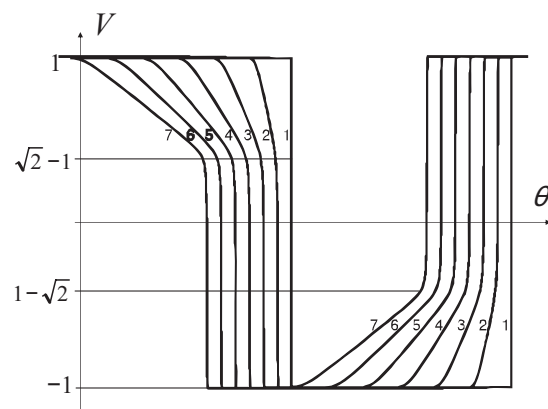


Рис. 4: Формирование устойчивых фронтов сжатия и разрежения в QC среде

Волны сжатия (правое семейство кривых) и разрежения (левое семейство) на входе в среду представляли собой симметричные (относительно нулевого уровня) ступеньки с нулевой шириной фронта. Эти волны неустойчивы. С увеличением расстояния фронты искажаются — перед ними образуются предвестники. На больших расстояниях формируются ударные волны

с перепадами от $-\sqrt{2} + 1$ до $+1$ (сжатие) и от $\sqrt{2} - 1$ до -1 (разрежение). Кривые 1–7 отвечают последовательно увеличивающимся расстояниям, пройденным волной.

Эволюция периодического сигнала в QC среде показана на рис. 5. Кривые 1–9 соответствуют увеличивающимся расстояниям, пройденным волной в нелинейной среде. Видно, что исходная гармоническая волна (кривая 1) трансформируется в пилообразную. Однако, в отличие от обычной квадратично нелинейной среды, здесь «зубцы пилы» имеют не треугольную, а трапециевидную форму. Каждый период содержит две ударные волны: сжатия и разрежения.

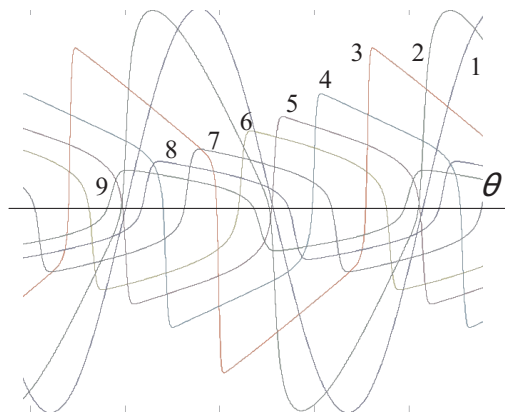


Рис. 5: Формирование трапециевидной «пилы» из гармонического исходного сигнала

Кроме того, на рис. 5 выражены еще два явления: нелинейное затухание, связанное с потерями энергии на ударных фронтах, и нелинейное самовоздействие — увеличение скорости распространения волны, типичное для сред с нечетными нелинейностями.

Сильно нелинейные волны обнаруживают немало интересных особенностей в своем поведении. Например, такая волна может демонстрировать явление «самозахвата»: достигнув значительной амплитуды, волна останавливается и превращается в пространственно-локализованное возмущение. При этом уравнение, описывающее волновую динамику, меняет тип — из гиперболического становится эллиптическим, подобно уравнению Эйлера–Трикоми. Локализованное сильное возмущение начинает притягивать и захватывать падающие на него более слабые волны. Эти результаты сообщались [9], но детально в публикациях пока не описаны.

Интересное поведение обнаруживают сингулярные решения нелинейных уравнений. Некоторые из них обладают корпускулярно-подобными свойствами, аналогичными свойствам солитонов (сталкивающихся как абсолютно упругие частицы) и ударных волн (неупругие соударения). Например, возможно «падение» слабых волн на сингулярность и последующее их исчезновение, взаимодействие сингулярностей между собой и другие эффекты. Сильные волны обнаруживают способность к «саморасщеплению»: достаточно сильная волна не может быть бегущей в одном направлении. Она рождает «самоотраженную» волну, бегущую в другую сторону.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель этого сообщения — показать, что в физике нелинейных волн содержится еще немало принципиально новых явлений, заслуживающих внимательного и детального изучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № № 14-22-00042).

- [1] Rudenko O.V. Russian Journal of Nondestructive Testing (Дефектоскопия). **29**, N 8. P. 583. (1993).
- [2] Rudenko O.V. Physics-Uspekhi (УФН, Adv. Phys. Sci.). **49**, N 1. P. 69. (2006).
- [3] Rudenko O.V. On strongly nonlinear waves and waves with strongly displayed weak nonlinearity. In the book: «Nonlinear Waves — 2012». P. 83. — Review Lecture. (Nizhni Novgorod: Inst. Appl. Phys. RAS, 2013).
- [4] Rudenko O.V., Hedberg C.M. Acoustical Physics. **59**, N 6. P. 644. (2013).
- [5] Rudenko O.V., Hedberg C.M. POMA and J. Acoust. Soc.

- Am. 4pPAa. (2013).
- [6] Собисевич А.Л., Руденко О.В. Акуст. журн. **51**. Приложение. С. 169. (2005).
- [7] Rudenko O.V. Physics-Uspekhi (УФН, Adv.Phys.Sci). **56**, N 7. P. 683. (2013).
- [8] Rudenko O.V., Solodov E.V. Acoustical Physics. **57**, N 1. P. 51. (2011).
- [9] Rudenko O.V., Hedberg C.M. JASA. **135**, N 4. P. 2312. (2014).

Strongly nonlinear phenomena in acoustics

O.V.Rudenko

*Department of Acoustics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119991, Russia*

E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

The difference between strongly nonlinear waves and waves with strongly displayed weak nonlinearity is pointed out. The classification of strongly nonlinear systems is given. The simplest structural features of meta-materials having high nonlinearity are described. Examples of mathematical models having sufficient generality and interesting for nonlinear wave physics are given. Particle-like properties of singular solutions, as well as some unusual phenomena are pointed out. Accretion, self-trapping and self-splitting can exemplify such phenomena

PACS: 02.30.Jr, 05.45.-a, 43.25.+y, 43.25.-x, 47.35.De, 47.40.Nm

Keywords: strong nonlinearity, nonlinear meta-materials, self-trapping, self-splitting, stable shock waves of compression and rarefaction, trapezoidal sawtooth-shaped wave.

Received 13.11.2014.

Сведения об авторах

Руденко Олег Владимирович — докт. физ.-мат. наук, академик Российской академии наук, профессор, заведующий кафедрой акустики; тел.: (495) 939-29-36, e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru.