

Нелинейные волны в резонаторе из гелеобразной среды с неоднородностями в виде полостей

Т. Б. Крит,* В. Г. Андреев†

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Измерены амплитуды гармоник стоячих сдвиговых волн в резонаторе, заполненном неоднородной кубично нелинейной средой. Неоднородности приводят к появлению квадратичной нелинейности, отсутствующей в однородной среде. Проведена оценка вклада квадратичной нелинейности в развитие нелинейных эффектов.

PACS: 43.25.+y.

УДК: 534.2.

Ключевые слова: резонатор, структурная неоднородность, стоячие волны, гелеобразная среда, модуль сдвига.

Измерены амплитуды гармоник стоячих сдвиговых волн, возбуждаемых в резонаторе, заполненном неоднородной средой с кубичной нелинейностью. Наличие неоднородностей приводит к появлению квадратичной нелинейности, отсутствующей в однородной среде. Поэтому было важно исследовать генерацию чётных гармоник и оценить вклад квадратичной нелинейности в развитие нелинейных эффектов.

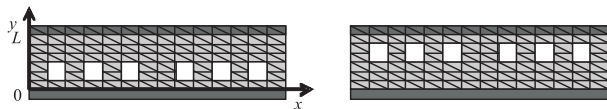


Рис. 1: Изображение конфигураций резонатора с полостями у нижнего (слева) и верхнего (справа) основания. Чёрными линиями показаны границы конечных элементов в форме треугольных призм

Рассмотрим резонатор в виде прямоугольного параллелепипеда с основанием 70x40 мм и толщиной $L = 15$ мм из резиноподобного материала с плотностью $\rho = 0,98$ г/см³. Толщина резонатора L в несколько раз меньше его поперечных размеров, что позволяет пользоваться одномерным приближением [1]. В параллелепипеде на одной высоте параллельно боковым граням сделано 6 сквозных полостей квадратного сечения со стороной 5 мм. Их центры смещены относительно срединного сечения резонатора на расстояние 2,5 мм, что позволяет получить две различных конфигурации резонатора (рис. 1). Параллелепипед закрепляется на горизонтальной пластине, которая совершает гармонические колебания в направлении оси x . На верхней грани ($y = L$) закреплена пластина массы M , площадь которой равна площади верхней грани. Модель среды изображается параллельным соединением упругого элемента с нелинейным модулем $\mu_0 = \mu_{00}(1 + \beta\varepsilon^2)$, где μ_{00} — линейный модуль сдвига, β — нелинейный параметр, и максвелловского вязкоупругого элемента

с вязкостью η_1 и сдвиговым модулем $\mu_1 = \eta_1/\tau$, где τ — характерное время релаксации напряжения.

Модуль сдвига μ_0 был предварительно определён статическим методом. Нижняя граница закреплялась неподвижно, а к верхней границе прикладывалась сила, создающая сдвиговую деформацию. Измеренные зависимости напряжения от деформации для обеих конфигураций совпали с достаточно большой точностью. Зависимости аппроксимировались кубичной параболой: $\sigma = \mu_{00}(\varepsilon + \beta\varepsilon^3)$, и вычислялись значения линейного и нелинейного модулей. В неоднородном резонаторе $\mu_{00} = 6$ кПа, $\beta = 1,33$. Аналогичные измерения в однородном резонаторе из такого же материала позволили измерить сдвиговый модуль и нелинейный параметр самого полимерного материала (обозначения с индексом «м»): $\mu_{00}^m = 10$ кПа, $\beta^m = 1,34$. Как и следовало ожидать, полости снижают эквивалентную упругость материала. Но статический нелинейный модуль как однородного материала, так и материала с неоднородностями совпали.

При деформации резонатора на величину ε (в долях толщины) в ней возникает механическое напряжение, которое складывается из напряжения пружинки

$$\sigma_\infty = \mu_0\varepsilon = \mu_{00}(1 + \beta\varepsilon^2)\varepsilon, \quad (1)$$

и напряжения максвелловской схемы σ'

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + \frac{\sigma'}{\tau} = \frac{\eta_1}{\tau} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнение движения частиц среды имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\sigma}{\partial y}. \quad (3)$$

В него входит производная скорости частиц v по времени и механическое напряжение $\sigma = \sigma_\infty + \sigma'$. Уравнения (1)–(3) должны быть дополнены двумя граничными условиями, первое из которых — заданное значение ускорения нижней пластины, а второе определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{y=0} = W_0 \cos \omega t, \quad (4)$$

*E-mail: timofey@acs366.phys.msu.ru

†E-mail: andrejev@acs366.phys.msu.ru

$$\left(M \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma S \right) \Big|_{y=L} = 0, \quad (5)$$

Система (1)–(5) в работе [2], где рассматривался однородный резонатор, моделировалась методом конечных разностей на смещённых сетках. Использованный в [2] алгоритм не позволяет моделировать неоднородный резонатор. Моделирование в линейном приближении проводилось методом конечных элементов (МКЭ) [1] без учёта кубичной нелинейности и релаксации, но с учётом структурных неоднородностей. В результате, решение разбивалось на два этапа.

На первом этапе использовался МКЭ для определения линейного сдвигового модуля упругости материала (μ_{00}). Затем, также с использованием МКЭ, вычислялась пара эффективных значений сдвигового модуля однородных резонаторов, при которых резонансные кривые совпадали с измеренными резонансными кривыми для каждой конфигурации неоднородного резонатора.

На втором этапе расчёт проводился в рамках модели нелинейного однородного резонатора с релаксацией [2]. Для каждой конфигурации использовались эффективные значения, вычисленные с помощью МКЭ. Значение нелинейного коэффициента β , при котором различие между измеренной и рассчитанной зависимостью сдвига резонансной частоты от величины сдвиговой деформации было минимально в смысле МНК, принималось за измеренный параметр неоднородной среды.

Измерения были проведены на установке, описанной в [2]. Колебания нижней пластины резонатора возбуждались вибратором Brüel & Kjær 4810. Сигнал на вибратор поступал с генератора Tektronix 3021B через усилитель мощности MMF LV 103. Ускорения обеих пластин резонатора измерялись миниатюрными одноосными акселерометрами Brüel & Kjær 4374. Сигналы акселерометров регистрировались осциллографом Tektronix 3032B и передавались через GPIB интерфейс в компьютер. Управление установкой и сбор данных осуществлялись с помощью программы, написанной в среде LabView. Измерения проводились с шагом по частоте 0,1 Гц. При заданной частоте на выходе генератора устанавливалось напряжение, при котором амплитуда ускорения нижней пластины была немного меньше необходимого значения. Это напряжение увеличивалось, пока амплитуда ускорения не достигала необходимого значения с погрешностью, не превышающей 2%. В течение 2–3 секунд в резонаторе устанавливались стационарные колебания, после чего производилось измерение и запись ускорения верхней пластины резонатора. Затем задавалось следующее значение частоты и измерения повторялись в соответствии с описанным алгоритмом.

На рис. 2 представлены измеренные резонансные кривые вблизи максимумов при разных амплитудах первой гармоники ускорения нижней пластины. Симметричная резонансная кривая, измеренная при амплитуде 1 м/с^2 , соответствует линейному режиму. С уве-

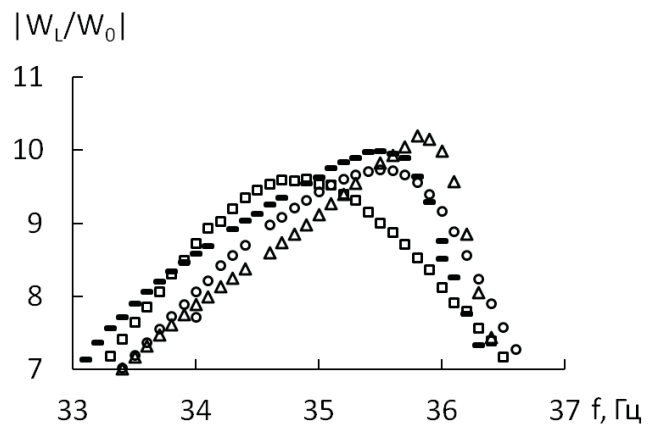


Рис. 2: Измеренные резонансные кривые вблизи максимумов в резонаторе с полостями внизу (в области больших деформаций). Кривые, показанные разными символами, соответствуют разным амплитудам ускорения нижней границы ($\square - 1, \circ - 15, \bullet - 18, \triangle - 20 \text{ м/с}^2$)

личением амплитуды ускорения резонансная частота увеличивается. Резонансная кривая становится несимметричной, на ней появляется перегиб, характерный для сред с кубичной нелинейностью. В [3] показано, что при определённых амплитудах в однородном резонаторе возможно появление области бистабильности.

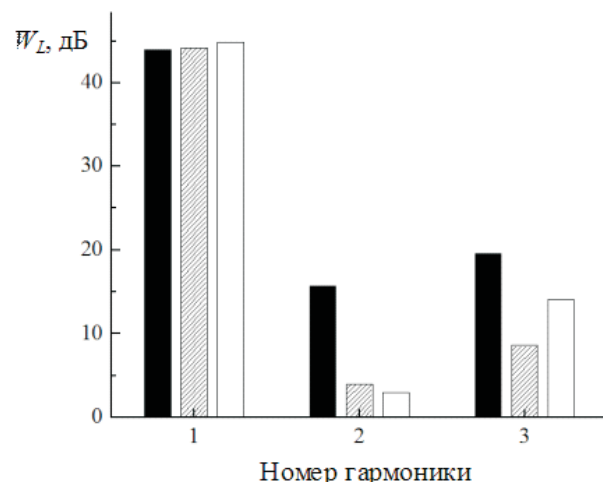


Рис. 3: Первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней границы резонатора с полостями в области больших (чёрные столбики) и малых (заштрихованные столбики) деформаций. Белыми столбиками показаны гармоники в однородном резонаторе без полостей

По измеренным резонансным кривым была построена зависимость первой резонансной частоты от амплитуды ускорения нижней пластины. Зависимость была

аппроксимирована теоретической кривой, рассчитанной с использованием модели однородного резонатора с учётом нелинейности и релаксации [2]. При расчёте было использовано эффективное значение модуля сдвига (7.6 кПа), при котором в линейном режиме ($W_0 = 1 \text{ м/с}^2$) измеренная в неоднородном резонаторе резонансная кривая совпадает с рассчитанной с помощью одномерной модели однородного резонатора с учётом нелинейности и релаксации. По результатам аппроксимации было определено эффективное значение динамического нелинейного параметра в резонаторе с полостями внизу $\beta = 1, 2$, что практически совпадает со значением, определённым в ходе статических измерений. Как показано в [3], в однородной среде динамический нелинейный параметр на частотах 30–50 Гц равен 0,7–0,8, что почти вдвое меньше значения нелинейного параметра, измеренного по статической зависимости напряжения от деформации.

В среде с кубической нелинейностью профиль волны искажается за счёт появления третьей гармоники [4, 5]. В резонаторе этот эффект может быть более выраженным при наличии неоднородностей в области больших деформаций, а может быть существенно снижен, если неоднородности расположены вблизи пучности колебаний. На рис. 3 приведены первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней границы резонатора. Заштрихованными столбиками пока-

зан гармонический состав профиля верхней границы резонатора с полостями вверху. Чёрными столбиками показан гармонический состав профиля верхней границы резонатора с полостями внизу. Видно, что уровень 3-й гармоники выше в резонаторе с полостями вверху. Наличие в спектре других гармоник (прежде всего, 2-й) связано с тем, что при проведении измерений возбуждение производится маломощным вибратором и становится нелинейным при больших амплитудах ускорения нижней пластины. Кроме того, скачивается структурная квадратичная нелинейность, которая также усиливается при положении неоднородностей в области максимальных деформаций.

Результаты измерений показали, что наличие полостей в области больших деформаций в нелинейном режиме колебаний приводит к усилению нелинейных эффектов. Так, рост частоты соответствует расчётным значениям для коэффициента нелинейности $\beta = 1, 2$, что практически совпадает с измеренным статическим значением данного параметра. Для однородного резонатора, исследованного в работе [2], динамический нелинейный параметр оказался вдвое меньше статического.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-02-00114-а и гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066.

- [1] Андреев В.Г. и др. Акуст. журн. **57**, № 1. С. 3. (2011).
 [2] Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Акуст. журн. **57**, № 6. С. 763. (2011).
 [3] Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О. Акуст. журн. **53**, № 4. С. 522. (2007).

- [4] Zabolotskaya E.A., et al. J. Acoust. Soc. Am. **116**, N5. P. 2807. (2004).
 [5] Catheline S., et al. Phys. Rev. Lett. **91**, N16. 164301. P. 1–4. (2003).

Nonlinear Waves in a Resonator of Gel-Like Medium with Porous Inhomogeneities

T. B. Krit^a, V. G. Andreev^b

Department of acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
 E-mail: ^atimofey@acs366.phys.msu.ru, ^bandreev@acs366.phys.msu.ru

The amplitudes of standing shear wave harmonics were measured in a resonator filled with inhomogeneous cubically nonlinear medium. The inhomogeneities lead to quadratic nonlinearity appearance which is absent in homogeneous medium. Quadratic nonlinearity contribution in nonlinear effects development was estimated.

PACS: 43.25.+y.

Keywords: resonator, structural inhomogeneity, standing waves, gel-like medium, shear modulus.

Сведения об авторах

1. Крит Тимофей Борисович — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: timofey@acs366.phys.msu.ru.
2. Андреев Валерий Георгиевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: andreev@acs366.phys.msu.ru.