

## Мультистабильные и хаотические автоколебания в кольцевых ДВ-осцилляторах

В. В. Зайцев,\* Е. Н. Крыгина,† С. В. Линдт‡

*Самарский государственный университет,  
физический факультет, кафедра радиофизики  
Россия, Самара, ул. Академика Павлова, д. 1*

Представлены результаты численного моделирования автоколебаний в кольцевом генераторе с активными ячейками Ван дер Поля. Показано, что при больших превышениях порога генерации в системе с идентичными ячейками наблюдается неоднородное пространственное распределение амплитуд автоколебаний. Исследованы регулярные и хаотические автоколебания в кольцевых ДВ-осцилляторах.

PACS: PACS: 05.45.-a. УДК: 517.938.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля, кольцевой генератор, дискретное время, хаотические автоколебания.

Кольцевые автоколебательные системы представляют интерес в качестве источников сигналов с повышенной долговременной стабильностью частоты [1]. В то же время они интересны и как нелинейные динамические модели для описания разнообразных физических эффектов [2]. Настоящим сообщением вводятся в рассмотрение объекты нелинейной динамики дискретного времени — активные кольцевые ДВ-осцилляторы в форме алгебраически простых каскадов. ДВ-осцилляторы синтезированы нелинейным методом импульсной инвариантности [3], по аналоговым прототипам — кольцевым генераторам с активными, но не самогенерирующими ячейками. Исследованы особенности регулярных и хаотических автоколебаний в рассматриваемых системах.

ДВ-осциллятор, имеющий аналоговым прототипом кольцевой генератор Ван дер Поля [4], определяется многомерным дискретным отображением

$$\begin{aligned} x_n[k] - 2\alpha \cos(2\pi\omega_0) x_n[k-1] + \alpha^2 x_n[k-2] = \\ = \gamma \{ \cos(2\pi\omega_0) g(x_{n-1}[k-1]) - g(x_{n-1}[k-2]) \}, \\ n = 1, 2, \dots, N \quad x_0[k] = x_N[k], \quad g(x) = x - x^3/3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь параметр диссипации  $\alpha = \exp(-\pi\omega_0/Q)$  определяется добротностью  $Q$  резонансной ячейки;  $\omega_0$  — собственная частота каскада, измеряемая в единицах частоты дискретизации (каскады считаются идентичными);  $\gamma$  — параметр связи между ячейками (уровень возбуждения).

При выполнении условия  $\gamma \geq \gamma_c = 1 - \alpha^2$  в ячейках системы (1) возбуждаются синфазные автоколебания, которые можно представить в форме

$$x_n[k] = \frac{1}{2} A_n[k] Z^k + \frac{1}{2} A_n[k] Z^{-k}, \quad (2)$$

где  $Z = \exp(j2\pi\omega_0)$  — множитель поворота, а амплитуды  $A_n[k]$  считаются медленными функциями дискретного времени.

Считая условием медленности выполнение приближенных равенств

$$A_n[k-1] - A_n[k-2] = A_n[k] - A_n[k-1]$$

и пренебрегая третьей гармоникой дискретного сигнала (2), для амплитуд автоколебаний в ячейках кольцевого ДВ-осциллятора (1) удается получить следующую систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} A_n[k] = A_n[k-1] - \pi \frac{\omega_0}{Q} A_n[k-1] + \\ + \frac{\gamma}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} A_{n-1}^2[k-1] \right) A_{n-1}[k-1], \\ n = 1, 2, \dots, N; \quad A_0[k] = A_N[k]. \end{aligned} \quad (3)$$

Дальнейший анализ динамических характеристик кольцевых осцилляторов проведен на основе численных решений разностных укороченных уравнений (3). Ряд результатов для кольца из  $N = 4$  ячеек состоит в следующем.

С ростом уровня возбуждения наблюдается эволюция режимов генерации автоколебаний. В интервале значений  $\gamma_c \leq \gamma < \gamma_1$  кольцевая система ведет себя как обычный осциллятор Ван дер Поля, распределение амплитуд установившихся автоколебаний по ячейкам однородно. Далее, если  $\gamma_1 \leq \gamma < \gamma_2$ , то в системе устанавливается бистабильный режим, при котором амплитуды автоколебаний в ячейках могут принимать одно из двух значений и их распределение по ячейкам неоднородно: ячейки с низкими и высокими амплитудами чередуются. Затем, при  $\gamma_2 \leq \gamma$ , реализуется режим с четырьмя возможными значениями установившихся амплитуд, а их распределение по ячейкам произвольно. Рис. 1, а иллюстрирует описанную смену режимов в процессе установления автоколебаний в кольцевой системе из четырех ячеек с параметрами  $\omega_0 = 0,23$ ,  $Q = 20$ ,  $\gamma = 0,169$ .

Следует отметить, что мощности установившихся автоколебаний при  $\gamma \rightarrow \infty$ , согласно решению укороченных

\*E-mail: zaitsev@samsu.ru

†E-mail: comphysics@ssu.samara.ru

‡E-mail: svvetlana\_l@mail.ru.

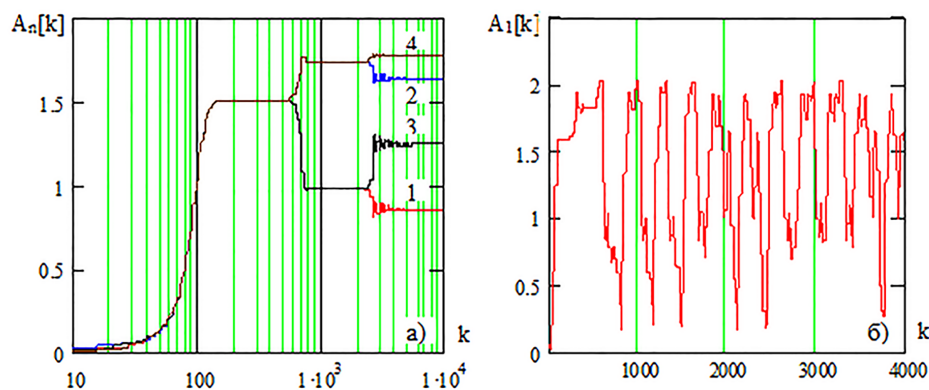


Рис. 1: Огибающие автоколебаний в кольцевом ДВ-осцилляторе

ченных уравнений (3), удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 = 2N.$$

Однако такой режим является неустойчивым и при высоких уровнях возбуждения кольцевой ДВ-осциллятор переходит в режим генерации с хаотической амплитудной модуляцией (см. рис. 1б для  $\gamma = 0,2$ ).

Аналогичные закономерности наблюдаются в кольцевых системах с любым четным числом ячеек. В системах из нечетного числа ячеек описанное расщепление энергетических уровней не происходит: в них режим с однородным распределением амплитуд по ячейкам с ростом уровня возбуждения сменяется режимом с автомодуляцией амплитуды, сначала регулярной, а затем хаотической.

- [1] Зайцев В. В., Шепелевич Л. Г., Якимов А. В. Радиотехника и электроника. **25**, № 5. С. 990. (1980).  
 [2] Спротт Дж. К. Элегантный хаос. (М.-Ижевск: ИКИ, 2012).  
 [3] Зайцев В. В. Физика волновых процессов и радиотехни-

- ческие системы. **17**, № 1. С. 47. (2014).  
 [4] Зайцев В. В., Линдт С. В., Стулов И. В. Вестник СамГУ. № 1(102). С. 114. (2013).

## Multistable and chaotic self-oscillations in ring DT- oscillators

V. V. Zaitsev<sup>a</sup>, E. N. Krygina<sup>b</sup>, S. V. Lindt<sup>c</sup>

Department of radiophysics, Faculty of Physics, Samara State University  
 Samara 443011, Russia

E-mail: <sup>a</sup>zaitsev@samsu.ru, <sup>b</sup>comphysics@ssu.samara.ru, <sup>c</sup>svetlana\_l@mail.ru

The results of numerical simulation of self-oscillations in a two-stage ring oscillator with active cells of Van der Pol are presented. It is shown that for large excesses of generation threshold in a system with identical cells, non-uniform spatial distribution of amplitudes of self-oscillations is observed. Regular and chaotic self-oscillations in ring DT- oscillators are investigated.

PACS: 05.45.-a.

Keywords: Van der Pol oscillator, ring oscillator, discrete time, chaotic self-oscillations.

### Сведения об авторах

1. Зайцев Валерий Васильевич — кандидат физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры радиофизики СамГУ; тел.: (846) 334-54-35, e-mail: zaitsev@samsu.ru.
2. Крыгина Екатерина Николаевна — магистрант физического факультета СамГУ; тел.: (846) 334-54-35, e-mail: comphysics@ssu.samara.ru.
3. Линдт Светлана Владимировна — аспирант физического факультета СамГУ; тел.: (846) 334-54-35, svvetlana\_l@mail.ru.