УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА **5,** 135076 (2013)

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ

С.К. Тлеукенов, Л.А. Ельтинова

Евразийский Национальный университет имени Л. Гумилева (г. Астана)

matricant@inbox.ru

Поверхностные акустические волны могут существовать вблизи свободной поверхности твердого тела или вблизи поверхности раздела двух различных тел. Один из видов поверхностных акустических волн, волны Рэлея, теоретически открытые Рэлеем в 1885 г., могут существовать в твердом теле вблизи его свободной поверхности, граничащей с вакуумом. Фазовая скорость таких волн направлена параллельно поверхности, а колеблющиеся вблизи нее частицы среды имеют как поперечную, перпендикулярную поверхности, так и продольную составляющие вектора смещения. Эти частицы описывают при своих колебаниях эллиптические траектории в плоскости, перпендикулярной поверхности и проходящей через направление фазовой скорости (Рис.1.). Указанная плоскость называется сагиттальной. Амплитуды продольных и поперечных колебаний уменьшаются по мере удаления от поверхности вглубь среды по экспоненциальным законам с различными коэффициентами затухания [1-3].

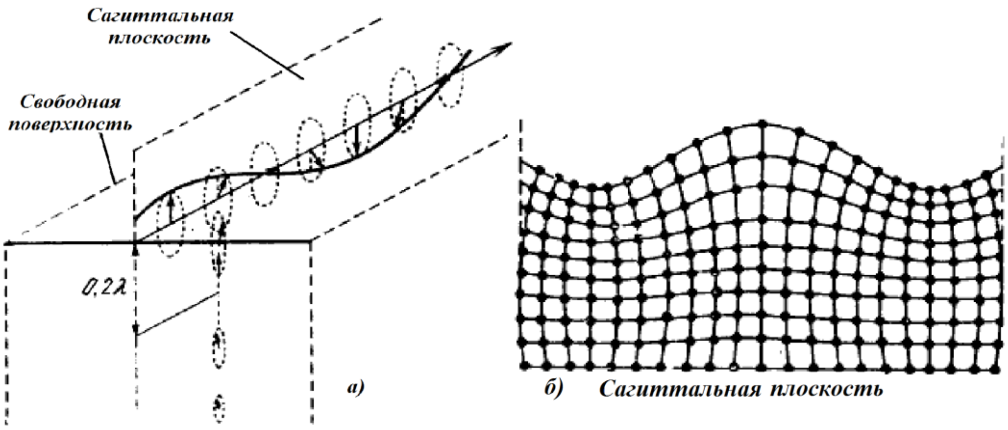

Рис.1. Волны Рэлея. Смещение частиц происходит в сагиттальной плоскости и содержит продольную и поперечную компоненты, сдвинутые по фазе на π/2, амплитуды которых убывают по разным законам. Конец вектора поляризации описывает на поверхности эллипс обратного знака (а). Смещение равна нулю на глубине 2λ. Волна вызывает искривление поверхности(б)

Уравнения движения упругих сред имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_J} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

Закон Гука для упругих анизотропных сред записывается в виде:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

где $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k})$ – тензор деформации, u_i – компонента вектора смещения, σ_{ij} – тензор механических напряжений, c_{ijkl} – константы упругой жесткости.

В рамках метода матриканта классические уравнения движения упругих анизотропных сред приводятся к матричному дифференциальному уравнению первого порядка[4]:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = \hat{B}\vec{W} \tag{3}$$

где $\vec{W} = [u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}]^t$; u_x, u_y, u_z – компоненты вектора смещения, $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ - компоненты тензора напряжений.

На основе представлений решений в виде:

$$\left[U_i(x,y,z), \sigma_{ij}(x,y,z)\right] = \left[U_i(z), \sigma_{ij}(z)\right] * e^{i(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y)}, \tag{4}$$

ось z совмещена с осью симметрии A_2, из системы уравнений выделяются производные по оси z относительно вектора $\vec{u}$ и строится система ДУ.

Матрица коэффициентов B в уравнении (3) для упругих волн распространяющихся в анизотропной среде ромбической, тетрагональной, гексагональной и кубической сингонии имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & b_{36} & 0 & b_{56} \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Из данной структуры видно, что волны различной поляризации связаны между собой. Это доказывает наличие коэффициентов b_{13}, b_{24}, b_{15}, b_{26}, b_{36}, b_{45}.

При распространении волн в плоскости (XZ), полагая k_y=0, из (5) приходим к структуре B в виде:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \quad B'' = \begin{pmatrix} 0 & b_{56} \\ b_{65} & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

В этом случае поперечная волна X -поляризации распространяется независимо (выделение независимой матрицей 2x2), а Y – поперечная и Z – продольная распространяются связанно.

Матрица (6) эквивалентна структуре B, описывающей распространение упругих волн в неоднородной анизотропной среде кубической сингонии вдоль любой из координатных плоскостей[5].

Структура матрицы коэффициентов позволяет ввести понятие и построить структуру матрицанта *B* рассматриваемой системы уравнений. Одним из следствий построения матрицанта является возможность получения матрицанта однородных анизотропных сред в явной аналитической форме. Это представление позволяет рассмотреть и решить вопрос о существовании волн Рэлея на свободной границе анизотропных сред вдоль координатных плоскостей. На основе метода матрицанта были получены условия существования волн Рэлея на свободной границе для анизотропных сред в виде [4]:

$$\sqrt{\left(b_{12}b_{43}-b_{13}^2\right)\left(b_{21}b_{34}-b_{24}^2\right)}b_{21}-\left(b_{21}b_{34}-b_{24}^2\right)b_{43}=0 \qquad (7)$$

Однако в указанной работе уравнения существования волн Рэлея не были получены в явном виде. Кроме того, получено уравнение существования волн Рэлея для анизотропных сред гексагональной сингоний.

Рассмотрим случай гексагональной сингонии класса 6, явный вид ДУ [4]:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_z}{dz}=\frac{1}{c_{33}}\sigma_{zz}+im\frac{c_{13}}{c_{33}}u_x+in\frac{c_{13}}{c_{33}}u_y\\
&\frac{d\sigma_{zz}}{dz}=-\rho\omega^2u_z+im\sigma_{xz}+in\sigma_{yz} \qquad \frac{du_x}{dz}=imu_z+\frac{1}{c_{44}}\sigma_{xz}\\
&\frac{d\sigma_{xz}}{dz}=im\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+mn\left(c_{12}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}+\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right)u_y+\\
&+\left[-\rho\omega^2+m^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)+n^2\left(\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right)\right]u_x\\
&\frac{du_y}{dz}=inu_z+\frac{1}{c_{44}}\sigma_{yz}\\
&\frac{d\sigma_{yz}}{dz}=in\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+mn\left(c_{12}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}+\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right)u_x+\left[-\rho\omega^2+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)+\left(\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right)m^2\right]u_y
\end{aligned} \qquad (8)$$

Матрицы коэффициентов для гексагональной сингонии класса 6

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\ b_{13}=im\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{15}=in\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{21}=-\omega^2\rho,\quad b_{24}=im,\ b_{26}=in,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}}\right)+n^2\left(\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right),\qquad b_{45}=mn\left(c_{12}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}+\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right),\ b_{56}=b_{34},$$

$$b_{65}=-\omega^2\rho+m^2\frac{c_{11}-c_{12}}{2}+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right) \qquad (9)$$

Матрицы коэффициентов для гексагональной сингонии класса 6 для плоскости *xz* (*n*=0) $b_{12}=\frac{1}{c_{33}}$, $b_{13}=im\frac{c_{13}}{c_{33}}$, $b_{15}=0$, $b_{21}=-\omega^2\rho$, $b_{24}=im$, $b_{26}=0$,

$$b_{34}=\frac{1}{c_{44}},\ b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}}\right),\ b_{45}=0,\ b_{65}=-\omega^2\rho+m^2\frac{c_{11}-c_{12}}{2} \qquad (10)$$

Условия существования волн Рэлея находим, подставляя (10) в (7):

$$\sqrt{\left(m^2-\frac{\omega^2\rho}{c_{11}}\right)\left(m^2-\frac{\omega^2\rho}{c_{44}}\right)\frac{c_{11}}{c_{33}}}\omega^2\rho+\left(m^2-\frac{\omega^2\rho}{c_{44}}\right)\left(m^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)-\omega^2\rho\right)=0 \qquad (11)$$

Полученные выше условия существования волн

$$\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{V_p^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{V_s^2}\right)\frac{c_{11}}{c_{33}}}\frac{V^2}{V_*^2}+\left(1-\frac{V^2}{V_s^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{V_*^2}\right)=0$$

,

$V_p^2=\dfrac{c_{11}}{\rho}$ – скорость продольной волны, $V_s^2=\dfrac{c_{44}}{\rho}$ – скорость поперечной волны, где $m^2=\dfrac{\omega^2}{V^2}$, $V_*^2=\dfrac{c^*}{\rho}$, $c^*=\dfrac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}}$.

Если заменить $x^2=\dfrac{V^2}{V_s^2}$, $\dfrac{V^2}{V_p^2}=x^2\dfrac{V_s^2}{V_p^2}$, $\dfrac{V^2}{V_*^2}=x^2\dfrac{V_s^2}{V_*^2}$

то получим

$$\sqrt{\left(1-x^2\frac{V_s^2}{V_p^2}\right)\left(1-x^2\right)\frac{c_{11}}{c_{33}}}x^2\frac{V_s^2}{V_*^2}+\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\frac{V_s^2}{V_*^2}\right)=0 \qquad (12)$$

В работе методом матриканта выведены в явном виде уравнения существования волн Рэлея на свободной границе анизотропных сред. Этот метод получения уравнения отличается от ранее используемых методов единообразием, общностью и простотой. Получен также вид этих условий удобный для их анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 872 с.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
3. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 411с.
4. Тлеукенов С.К., Баяубаев Е.К., Исследование волн Рэлея вдоль свободной границы анизотропных сред кубической, гексагональной и ромбической сингоний.// Вестник ПГУ, серия физ.-мат. 2009. № 2 С. 73-76.
5. Tleukenov S.K., Zhakiyev N.K., Yeltinova L.A., Propagation of coupled waves of different nature inanisotropic continuous media: universal method for theoretical description // General Meeting of Asian Consortium on Computational Materials Science, Tohoku University, Sendai, Japan, 2012.