УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА **5**, 135075 (2013)

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА ДЛИННЫХ И КОРОТКИХ ВОЛН

С.В. Сазонов[1], Н.В. Устинов[2]

[1]*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»*

[2]*Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения «МИИТ»*

sazonov.sergey@gmail.com

Возможность эффективного взаимодействия длинных и коротких волн, приводящая к образованию связанных состояний длинно-коротковолнового типа, впервые была рассмотрена в задаче физики плазмы [1]. Выведенная там система двух нелинейных волновых уравнений получила название уравнений Захарова, однонаправленным вариантом которой является система Ядзимы–Ойкавы [2]. Последняя система оказалась интегрируемой в рамках метода обратной задачи рассеяния [3, 4], что позволило существенно продвинуться в понимании совместной нелинейной динамики длинных и коротких волн. В частности, солитонные решения этой системы, соответствующие дискретной части данных рассеяния, обладают свойством структурной устойчивости: солитон восстанавливает свою форму после взаимодействия с себе подобными, а также с любыми другими локализованными возмущениями.

В дальнейшем системы уравнений, описывающие взаимодействие длинных и коротких волн, появлялись в гидродинамике, теории ферромагнетизма, оптике, нелинейной акустике и т.д. Сравнительно недавно при рассмотрении квазирезонансного взаимодействия оптических импульсов с несимметричными квантовыми объектами была получена система уравнений, обобщающая систему Ядзимы–Ойкавы на случай двух коротковолновых компонент [5]. Важной особенностью этой векторной системы Ядзимы–Ойкавы является то, что она тоже оказалась интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Ее солитонные решения были подробно исследованы в работе [6].

Довольно часто нелинейные оптические явления находят с течением времени свои аналоги при рассмотрении задач нелинейной акустики. В соответствии с логикой поиска оптико-акустических параллелей представляет несомненный интерес постановка вопроса о нахождении физической реализации интегрируемого векторного обобщения системы Ядзимы–Ойкавы в акустической задаче. Ответу на этот вопрос посвящено настоящее исследование.

Рассмотрим кубический кристалл, содержащий парамагнитные примеси, обладающие эффективным спином $S=1$. Пусть вдоль оси z, совпадающей с одной из осей симметрии четвертого порядка, к кристаллу приложены внешние статическая деформация величиной ε_0 и магнитное поле

B. Параллельно этой же оси распространяется продольно-поперечный упругий импульс, взаимодействующий за счет спин-фононной связи с парамагнитными примесями. Обычно такую конфигурацию называют геометрией Фарадея. Гамильтониан H_a поля деформации в этом случае имеет вид

$$H_a = \int \left\{ \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\rho} + \frac{\rho a_{\|}^2}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{\rho a_{\perp}^2}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} d\mathbf{r}, \qquad (1)$$

где u_j и p_j ($j = x, y, z$) – декартовы компоненты векторов $\mathbf{u}$ смещений узлов кристаллической решетки и соответствующих им плотностей импульсов $\mathbf{p}$, ρ – средняя плотность среды, $a_{\|}$ и $a_{\perp}$ – скорости продольного и поперечного звуков соответственно в отсутствие примесей; интегрирование в (1) ведется по всему объему кристалла.

Дополним (1) оператором Гамильтона $\hat{H}_s$, связывающим эффективный спин с магнитным полем, статической деформацией ε_0 кристалла и компонентами тензора динамической деформации:

$$\hat{H}_s = \hbar\omega_z \hat{S}_z + G_{\|} \hat{S}_z^2 \varepsilon_0 + G_{\|} \hat{S}_z^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{G_{\perp}}{2} \left[\left(\hat{S}_x \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_x \right) \frac{\partial u_x}{\partial z} + \left(\hat{S}_y \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_y \right) \frac{\partial u_y}{\partial z} \right]. \qquad (2)$$

Здесь ω_z – частота зеемановского расщепления спиновых подуровней, снимающего вырождение по проекции S_z эффективного спина на ось z, $G_{\|}$ и $G_{\perp}$ – постоянные спин-фононного взаимодействия, связывающие эффективный спин соответственно с компонентами тензора продольной и поперечной деформации, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ – спиновые матрицы.

Будем считать, что основной вклад в расщепление спиновых подуровней вносит квадрупольный штарк-эффект, снимающий вырождение по модулю проекции S_z (второе слагаемое в правой части (2)). При этом зеемановское расщепление (первое слагаемое там же), при котором снимается вырождение по S_z, вносит небольшое возмущение.

Исследование самосогласованной динамики акустического поля и эффективных спинов будем проводить, используя полуклассический подход. Согласно ему поведение эффективных спинов описывается уравнением для соответствующей матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}_s, \hat{\rho} \right], \qquad (3)$$

а динамика полей упругости – классическими уравнениями Гамильтона для сплошной среды:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{p}} \left(H_a + \langle \hat{\hat{H}}_s \rangle \right), \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} \left(H_a + \langle \hat{\hat{H}}_s \rangle \right), \qquad (4)$$

где $\langle\hat{\hat{H}}_s\rangle = n\int\langle\hat{H}_s\rangle d\mathbf{r}$, n – плотность парамагнитных примесей, $\langle\hat{H}_s\rangle = \mathrm{Sp}\left(\hat{\rho}\hat{H}_s\right)$ – квантовое среднее гамильтониана (2).

Для упрощения системы (3), (4) представим комплексную поперечную компоненту поля акустического импульса

$$\Omega = \frac{G_\perp}{\hbar}\frac{\varepsilon_{xz} + i\varepsilon_{yz}}{\sqrt{2}},$$

где ε_{xz} и ε_{yz} – поперечные компоненты тензора деформации, и недиагональные элементы матрицы плотности в виде

$$\Omega = \psi_+ \mathrm{e}^{i\omega_+(t - z/a_\perp)} - \psi_- \mathrm{e}^{i\omega_-(t - z/a_\perp)},$$
$$\rho_{13} = R_{13}\mathrm{e}^{i\omega_+(t - z/a_\perp)}, \quad \rho_{12} = R_{12}\mathrm{e}^{i\omega_-(t - z/a_\perp)}, \quad \rho_{23} = R_{23}\mathrm{e}^{i(\omega_+ - \omega_-)(t - z/a_\perp)}. \tag{5}$$

Здесь ψ_+, ψ_-, R_{13}, R_{12}, R_{23} – медленно меняющиеся огибающие. Подстановка (5) в (3) дает после усреднения систему материальных уравнений для огибающих.

Пусть отстройки $\Delta_{31} = \omega_{31} - \omega_+$, $\Delta_{21} = \omega_{21} - \omega_-$ несущих компонент акустического поля от частот $\omega_{31} = G_\parallel\varepsilon_0/\hbar + \omega_z$ и $\omega_{21} = G_\parallel\varepsilon_0/\hbar - \omega_z$ разрешенных квантовых переходов таковы, что выполняются условия квазирезонанса

$$\left(\Delta_{21}\tau_p\right)^{-1} \sim \left(\Delta_{31}\tau_p\right)^{-1} \ll 1,$$

где τ_p – длительность импульса. Тогда из системы волновых и материальных уравнений можно исключить диагональные элементы матрицы плотности и огибающие недиагональных элементов. Считая, что $\Delta_{31} = \Delta_{21} = \Delta$, в результате такого исключения получим систему уравнений

$$i\left(\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial t}\right) = \beta\frac{\partial^2\Phi_\pm}{\partial t^2} + \alpha U\Phi_\pm + 2\beta\left(\left|\Phi_+\right|^2 + \left|\Phi_-\right|^2\right)\Phi_\pm,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\parallel^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2a_\parallel b\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\left|\Phi_+\right|^2 + \left|\Phi_-\right|^2\right), \tag{6}$$

где $\Phi_\pm = \psi_\pm \exp(i\alpha_\pm z)$, $U = G_\parallel\varepsilon_{zz}/\hbar$, ε_{zz} — продольная компонента тензора деформации, постоянные α, $\alpha_\pm$, b выражаются через параметры задачи,

$$v_g = a_\perp\left(1 - \frac{nG_\perp^2\omega}{8\hbar\rho a_\perp^2}\frac{w_2 - w_1}{\Delta^2}\right)^{-1},$$

$\omega = (\omega_+ + \omega_-)/2$, w_1 и w_2 – начальные населенности основного и возбужденного спиновых подуровней.

В кристаллах скорость поперечного звука значительно меньше скорости продольного звука: $a_\perp < a_\parallel$. В случае термодинамически равновесной начальной населенности спиновых подуровней ($w_1 > w_2$) групповая скорость v_g становится меньше $a_\perp$, а ее отличие от $a_\parallel$ становится больше. В таких условиях взаимодействие между продольным и поперечным звуком будет незначительным, и образование связанных состояний длинно-коротковолнового типа невозможно. При этом система (6) переходит в хорошо известную систему Манакова [4].

Если же среда находится в термодинамически неравновесном состоянии ($w_1 < w_2$), то можно добиться выполнения условия $v_g = a_\parallel$, при котором взаимодействие между продольной и поперечными компонентами поля упругости будет наиболее эффективным, и возможно образование связанных длинно-коротковолновых состояний. В этом случае при выполнении условия $U \gg 2\left(\left|\Phi_+\right|^2 + \left|\Phi_-\right|^2\right)/\Delta$ систему (6) удается свести с помощью приближения однонаправленного распространения к векторной системе Ядзимы–Ойкавы

$$i\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial z} = \beta \frac{\partial^2 \Phi_\pm}{\partial \tau^2} + \alpha U \Phi_\pm, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -b\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left|\Phi_+\right|^2 + \left|\Phi_-\right|^2\right), \tag{7}$$

где $\tau = t - z/v_g$. Именно такая система была выведена ранее в оптических задачах [5, 6]. На ее основе подробно исследована динамика упругих импульсов в режиме нелинейного взаимодействия коротковолновых (поперечных) и длинноволновой (продольной) компонент.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №13-02-00199а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745.
2. Yadjima N. and Oikawa M. // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56. No. 6. P. 1719.
3. Захаров В.Е., Манаков С.В., С Новиков.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
4. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
5. Сазонов С.В., Устинов Н.В. // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94. № 8. С. 651.
6. Сазонов С.В., Устинов Н.В. // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. № 5. С. 842.