ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ГЛОБАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В.Н. Корниенко[1], А.П. Привезенцев[2]
[1]*ИРЭ имени В.А.Котельникова РАН*
[2]*Челябинский государственный университет*
korn@cplire.ru

В последнее время значительный научный интерес представляет исследование так называемых метаматериалов – искусственных сред со специфическими электромагнитными свойствами. Известно [1], что возможно создание квазинепрерывной среды, диэлектрическая и магнитная проницаемость которой одновременно принимают отрицательные значения. Отметим, что в этом случае фазовая и групповая скорости распространяющихся волн имеют противоположные знаки. Если в основе такой среды будут лежать пассивные элементы, то ее особые свойства проявятся в очень узкой полосе частот, соответствующей линии поглощения метаматериала. Одним из возможных путей преодоления этой трудности является использование активных сред. В частности, в [2] описаны попытки их применения для светового диапазона длин волн.

В классической физике в качестве элемента искусственной активной среды можно рассматривать, например, осциллятор с исходно запасенной энергией. Его динамика зависит от состояния поля в месте его расположения, а, значит, будет определяться не только полем внешней волны, но и полями, созданными остальными осцилляторами.

Целью данной работы было исследование дисперсионных свойств одномерной безграничной цепочки осцилляторов, взаимодействующих между собой через общее поле. Предположим, что связь между осцилляторами и полем является индуктивной. Такую систему описывают следующие уравнения:

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)u(X,t)=G\sum_n \frac{dz(X_n,t)}{dt}\delta(X-X_n)\,, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)z(X_n,t)=M\,\frac{\partial u(X_n,t)}{\partial t}\,, \qquad (2)$$

где v – фазовая скорость волн в свободном пространстве, G,M – коэффициенты связи, ω_0 – собственная частота осциллятора, z – его отклонение от положения равновесия, $-\infty<n<\infty$, $X_n=\tilde{a}\,n$, $\tilde{a}$ – расстояние между ближайшими элементами.

Для перехода к безразмерным величинам воспользуемся соотношениями

$$\tau=\Omega t, x=\frac{\Omega}{2\pi v}X\ ,$$

где Ω -некоторая характерная частота. Тогда (1), (2) принимают вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}g\sum_n\frac{dz(x_n,\tau)}{d\tau}\delta(x-an), \qquad (3)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\tilde{\omega}_0^2\right)z(x_n,\tau)=m\frac{\partial u(x_n,\tau)}{\partial\tau}, \qquad (4)$$

Предположив гармоническую зависимость величин от времени

$$u(x,\tau)=\tilde{u}(x)\exp(-i\omega\tau),\ z(x_n,\tau)=\tilde{z}(x_n)\exp(-i\omega\tau),$$

преобразуем (3) к следующему виду:

$$\left(\omega^2+\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{u}=f, \qquad (5)$$

где

$$f=\frac{i\omega g}{2\pi}\sum_n\tilde{z}\delta(x-an).$$

Введя Фурье-образы функций $\tilde{u}$, f

$$\tilde{u}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U\exp(ikx)\,dk,\ f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F\exp(ikx)\,dk$$

из (5) получаем

$$U=\frac{F}{\omega^2-\dfrac{k^2}{4\pi^2}} \qquad (6)$$

причем

$$F=\frac{i\omega g}{2\pi}\sum_n\tilde{z}(an)\exp(-ikan). \qquad (7)$$

Будем искать собственные волны решетки в виде

$$\tilde{z}=\hat{z}(\beta)\exp(-i\beta x_n). \qquad (8)$$

Тогда

$$F=\frac{i\omega g}{2\pi}\hat{z}\sum_n\exp(i\beta an)\exp(-ikan).$$

Используя известную формулу Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-inT\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}n)$$

для F окончательно получаем

$$F=\frac{i\omega g}{2\pi}\hat{z}\sum_n\delta(k-\beta_n) \qquad (9)$$

где $\beta_n=\beta+\dfrac{2\pi}{a}n$.

Используя (9) и (6), для $\tilde{u}$ имеем:

$$\tilde{u}=\frac{i\omega g\,\hat{z}}{2\pi a}\sum_n\frac{\exp(i\beta_n x)}{\omega^2-\dfrac{\beta_n}{4\pi^2}}$$

Таким образом, поле в узлах цепочки можно записать в виде:

$$\tilde{u}(x_m) = \frac{i\omega g\,\hat{z}}{2\pi a}\exp(i\beta_m x_m)\sum_n \frac{1}{\omega^2 - \frac{\beta_n}{4\pi^2}} \qquad (10)$$

Подставив (10) в (4), используя (8), получаем следующее соотношение:

$$\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega^2 g\,m}{2\pi a}\sum_n \frac{1}{\left(\frac{\beta}{2\pi} + \frac{n}{a}\right)^2 - \omega^2} = 0 \qquad (11)$$

Согласно [3], бесконечная сумма в (10) может быть выражена через элементарные функции:

$$\sum_n \frac{1}{(n+c)^2 - d^2} = \frac{\pi}{d}\frac{\sin(2\pi d)}{\cos(2\pi d) - \cos(2\pi c)} \qquad (12)$$

Используя (12) для суммирования в (11), получаем выражение, связывающее частоту и волновое число рассматриваемой системы:

$$\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)\left(\cos(2\pi a\,\omega) - \cos(a\beta)\right) + \frac{\omega g\,m}{2}\sin(2\pi a\,\omega) = 0 \,. \qquad (13)$$

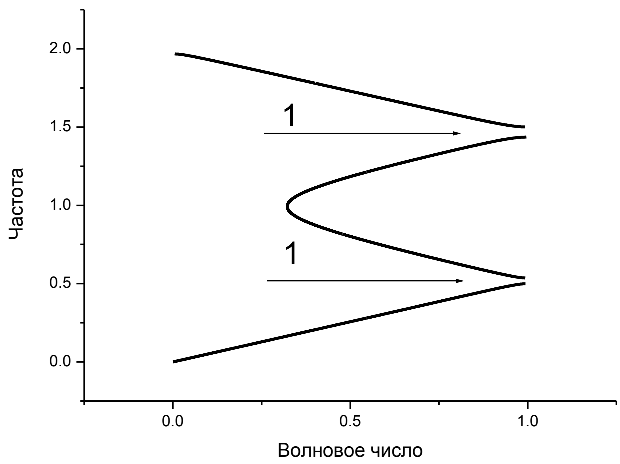

Рис.1. Зависимость частоты от волнового числа. 1 – запрещенные зоны.

Уравнение (13) позволяет провести детальный анализ дисперсионных характеристик рассматриваемой системы, характерный вид которых приведен на рис.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович В.М., Гартштейн Ю.Н. // Усп.физ.наук. 2006. Т.176. №10. С.1051.

2. Shumin Xiao, Drachev V.P., Kildishev A.V. at al // Nature. 05 August 2010. 466. P.735.

3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: ФИЗМАТЛИТ,2002. 632 с.