МЕТОД РАСЧЕТ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Н.С. Фролов[1], В.А. Максименко[1,2], А.А. Короновский[1,2], А.Е. Храмов[1,2]

[1]*ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”, 410012, Астраханская, 83, Саратов, Россия*

[2]*ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина”, 410054, Политехническая, 77, Саратов, Россия*

phrolovns@gmail.com

Ляпуновские показатели являются мощным инструментом для анализа сложной динамики систем, являющихся предметом изучения различных областей науки, включая радиофизику и нелинейную динамику [1]. Методы расчета спектра показателей Ляпунова основаны на алгоритме Бенеттина [2] и детально разработаны для систем с малым числом степеней свободы. Прямое применение данных методов для анализа пространственно-распределенных систем оказывается проблематичным [3], хотя данный класс систем является очень важным в различных прикладных применениях, в частности, при исследовании систем электронной и плазменной природы [4].

В настоящем докладе описывается метод анализа пространственно-распределенных пучково-плазменных систем, моделируемых в рамках метода крупных частиц [5], при помощи расчета спектров показателей Ляпунова.

В качестве базовой модели был выбран диод Пирса – эталонная модель пучково-плазменных систем, удобная для теоретического и численного анализа сложной динамики потока заряженных частиц со сверхкритическим током [4,6]. В рамках метода крупных частиц электронный поток представляется в виде совокупности заряженных листов (крупных частиц), инжектируемых в пространство взаимодействия через равные промежутки времени Δt. Численное моделирование такой системы осуществляется с помощью совместного решения уравнения движения электронного потока и уравнения Пуассона для нахождения конфигурации поля и потенциала пространственного заряда [6].

В качестве состояния диода Пирса для расчета показателей Ляпунова будем использовать вектор $U = (\rho(x,t), v(x,t))^T$. При этом для расчета первых N показателей в рассмотрение введем набор возмущений $V_i(x,t), i = 1,\dots,N$, удовлетворяющих условию нормировки и ортогональности. Набор возмущений, удовлетворяющих этим условиям, можно получить с помощью процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта. Особенностью метода является то, что для описания эволюции возмущений в работе будет использована система линеаризованных в окрестности состояния $U(x,t)$ гидродинамических уравнений, что позволяет эффективно анализировать линейную динамику возмущений в системе, а также проводить необходимые перенормировки, свойственные алгоритму Бенеттина.

Таким образом, по истечении периода времени длительностью T, набор возмущений $V_i(x,t)$ вновь подвергается указанной процедуре ортогонализации Грамма-Шмидта. Описанная последовательность действий повторяется M раз, после чего подсчитываются суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^{M} \ln\left\|\tilde{V}_i(x, jT)\right\|. \tag{1}$$

Здесь $\left\|\tilde{V}_i(x, jT)\right\|$ - возмущение до перенормировки, но после ортогонализации. В этом случае оценка значений пространственных ляпуновских экспонент определяется как

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}. \tag{2}$$

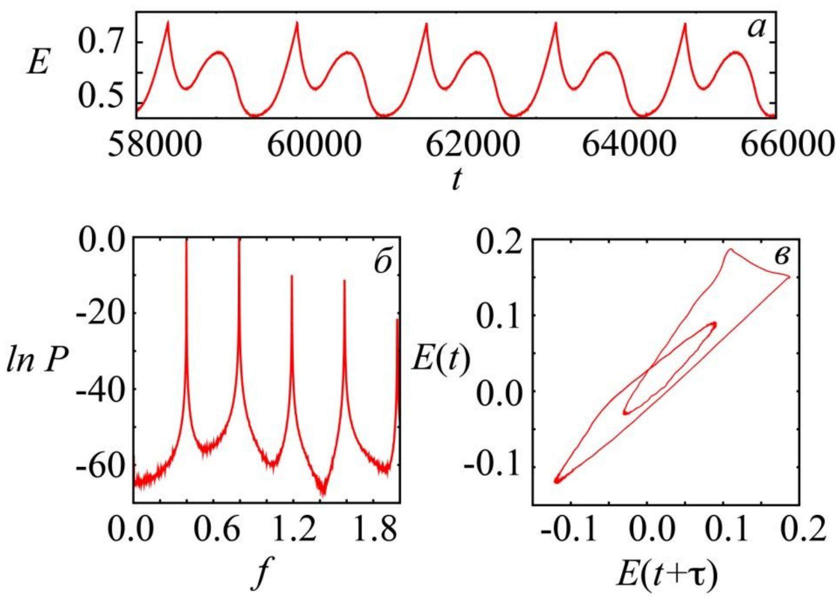

Рис. 1. Временная реализация (а), спектр (б) и фазовый портрет (в) колебаний поля пространственного заряда в исследуемой системе в точке с координатой x=0.5

С помощью описанного метода расчета спектра пространственных ляпуновских экспонент была исследована динамика электронного потока в диоде Пирса. Для иллюстрации приведем результаты расчета системы с параметром Пирса $\alpha = 1.4$ без заполнения ионным фоном ($n_{ion} = 0$). Известно, что при указанных управляющих параметрах в системе происходит формирование виртуального катода, совершающего близкие к периодическим колебания во времени и пространстве (рис. 1).

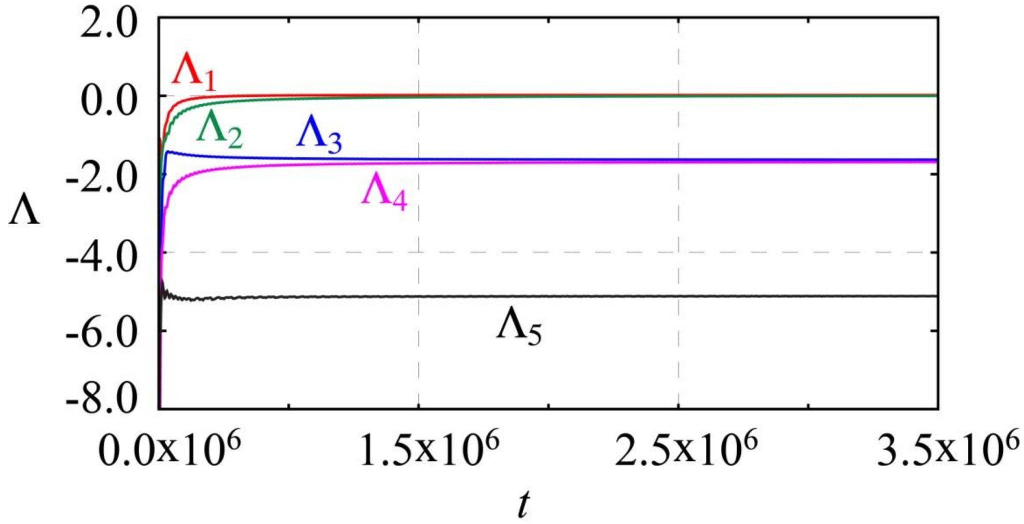

Рис.2 Зависимость пяти старших пространственных ляпуновских показателей от времени для модели диода Пирса при $\alpha = 1.4$ и $n_{ion} = 0$

На рис. 2 приведены результаты расчета зависимостей пяти старших показателей Ляпунова от времени для этого случая. Из рисунка видно, что данный режим характеризуется двумя нулевыми показателями, соответствующими комплексно-сопряженным возмущениям опорного состояния. Следует отметить, что два нулевых показателя являются максимальными в спектре, что соответствует периодической динамике исследуемой системы при выбранных управляющих параметрах. Таким образом, рассчитанный спектр показателей Ляпунова качественно соответствует режиму, наблюдаемому в системе. Рассмотренный алгоритм может быть использован для анализа сложной, в том числе и хаотической, динамики пространственно-распределенных пучково-плазменных систем, описываемых в рамках метода крупных частиц.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых – кандидатов (МК-818.2013.2) и докторов (МД-345.2013.2) наук, ведущих научных школ (проект НШ-1430.2012.2), а также РФФИ (проект 12-02-33071).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
2. Bennetin G., et al. // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9.
3. Hramov A.E. et al. // Physics of Plasmas. 2012. V. 19. № 8. P. 082302.
4. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. В 2-х томах. М.: Физматлит, 2003, 2004.
5. Birdsall C., Langdon A.B. Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw-Hill. (1985).
6. Егоров Е. Н. и др. // РиЭ. 2007. Т. 52. № 1. С. 51-64.