Сдвиг массы заряженной частицы в поле (1+n)–мерной черной дыры: размерная регуляризация

Ю. В. Грац*
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
(Статья поступила 18.12.2012; Подписана в печать 09.01.2013)

Методом размерной регуляризации получено выражение для собственной энергии и сдвига массы классического заряда в пространстве–времени $(1+n)$–мерной шварцшильдовской черной дыры. Показано, что метод размерной регуляризации приводит к результатам, которые согласуются с полученными с использованием других методов.

PACS: 04.40.-b, 11.10.Kk, 11.10.Dh УДК: 530.12: 531.51, 530.145.
Ключевые слова: черные дыры, собственная энергия, регуляризация, перенормировка.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема самодействия покоящейся заряженной частицы является одной из проблем классической теории поля, к которой постоянно возвращаются на протяжении не одного десятка лет. Задача, которая имеет очевидное решение в пространстве Минковского, становится нетривиальной при наличии внешнего гравитационного поля. Причина заключается в том, что гравитационное поле искажает дальнодействующее собственное поле заряда таким образом, что его конфигурация, а следовательно, и энергия, начинают зависеть от положения источника. Поэтому следует ожидать, что на покоящийся заряд в гравитационном поле должна действовать сила, которая получила название силы самодействия. Однако прямое вычисление этой силы в случае точечного источника сталкивается с проблемой расходимости и необходимостью регуляризации и перенормировки соответствующего формально расходящегося выражения. Предлагались различные схемы регуляризации, эквивалентность которых не является очевидной, поскольку процедура устранения бесконечностей не является математически корректной. Поэтому выяснение адекватности различных процедур регуляризации является самостоятельной задачей, без решения которой нельзя быть уверенным в осмысленности получаемых конечных результатов.

Одной из первых задач о самодействии, которые были рассмотрены в мировой литературе, стала задача о сдвиге массы заряда в гравитационном поле черной дыры [1–5] — одного из самых интересных объектов, которые были предсказаны общей теорией относительности. В последние годы решения типа черных дыр снова стали объектом интенсивного исследования в связи с активно развивающимися теориями в пространстве–времени с размерностью $d > 4$. При этом выяснилось, что расширение общей теории относительности на высшие размерности позволило существенно углубить понимание фундаментальных свойств черных дыр и потребовало дальнейшего исследования поведения классических и квантованных полей в пространствах с размерностью больше четырех.

В предлагаемой работе рассматривается проблема сдвига массы классической заряженной частицы в $d = (1+n)$–мерном $(n \geq 3)$ пространстве–времени Шварцшильда. Для этого предлагается воспользоваться методом размерной регуляризации, который для данной задачи ранее не использовался. Проводится сравнение результатов с результатами, полученными с использованием других методов.

План работы таков. В разделе 1 методом размерной регуляризации получено выражение для поправки к собственной энергии точечной электрически заряженной частицы в $(n+1)$–мерном статическом пространстве–времени. Получено приближенное выражение для перенормированной собственной энергии в случае произвольного относительно слабого гравитационного поля. Предложенный метод используется в разделе 2 для вычисления сдвига массы электрически заряженной частицы в поле многомерной черной дыры. В заключении сформулированы основные результаты.

Всюду в работе используется система единиц, в которой $c = 1$, и метрика пространства-времени с сигнатурой $(-,+,+,\ldots,+)$.

1. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В СТАТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим электрический заряд в $d = (1+n)$–мерном статическом пространстве-времени с метрикой

$$\begin{gathered} ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \,, \quad g_{tt} < 0 \,, \\ \mu, \nu = \overline{1, n} \,, \quad \partial_t g_{tt} = 0 = \partial_t g_{\mu\nu} \,. \end{gathered} \tag{1}$$

*E-mail: grats@phys.msu.ru

В случае статического источника с током $J^{\mu} = (J^t,\ \vec{0})\ (\partial_t J^t = 0)$ нетривиальное уравнение Максвелла в терминах единственной отличной от нуля компоненты потециала A_t имеет вид

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g}\ g^{tt} g^{\mu\nu} \partial_\nu A_t\right) = -4\pi\sqrt{-g}\, J^t, \qquad g = g_{tt} \det g\,. \tag{2}$$

При этом для энергии поля справедливо выражение

$$E = -\frac{1}{8\pi} \int d^n x\ \sqrt{-g}\ g^{tt} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_t \partial_\nu A_t\,.$$

Если воспользоваться теоремой Гаусса и уравнением поля (2), то выражение для энергии E может быть приведено к виду

$$E = \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{-g} A_t J^t = = 2\pi \int d^n x \sqrt{-g} \int d^n x' \sqrt{-g'}\ J^t(x) G(x, x') J^t(x')\,,$$

где $G(x, x')$ – функция Грина уравнения (2), которая является решением уравнения

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g}\ g^{tt} g^{\mu\nu} \partial_\nu G(x, x')\right) = -4\pi\sqrt{-g}\ \delta^n(x, x')\,, \qquad \delta^n(x, x') = \frac{\delta^n(x - x')}{\sqrt{-g}}\,. \tag{3}$$

Для локализованного в точке x точечного заряда e

$$J^t(x') = e\delta^n(x, x')\,,$$

и выражение для энергии приобретает вид

$$E = 2\pi e^2\ G(x, x)\,. \tag{4}$$

Как было указано выше, полученное выражение расходится. Методы, которые использовались ранее для его регуляризации и перенормировки опирались на то, что в случае черной дыры известно точное выражение для функции Грина электростатического поля. Однако точное выражение для функции Грина известно для относительно небольшого числа искривленных пространств. В остальных случаях для получения функции Грина приходится прибегать к методам теории возмущений.

Размерная регуляризация заключается в замене $G(x, x)$ на символ $G^\varepsilon(x, x)$, формально соответствующий функции Грина в пространстве $(n - 2\varepsilon)$ измерений (см., например, [6]).

Последующая перенормировка включает разделение $G^\varepsilon(x, x)$ на две части, одна из которых расходится при $\varepsilon \to 0$, а другая конечна

$$G^\varepsilon(x, x) = G^\varepsilon_{\text{расх}}(x, x) + G^\varepsilon_{\text{кон}}(x, x)\,, \tag{5}$$

и завершается отбрасыванием расходящейся части $G^\varepsilon_{\text{расх}}(x, x)$ с последующим переходом к пределу $\varepsilon \to 0$

$$G_{\text{рен}}(x, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[G^\varepsilon(x, x) - G^\varepsilon_{\text{расх}}(x, x)\right]\,. \tag{6}$$

В случае слабого гравитационного поля уравнение для функции Грина (3) удобно переписать в эквивалентном виде, выделив оператор Лапласа на n–мерном евклидовом пространстве $\Delta_E = \delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$,

$$\left(\Delta_E + V\right)\ G\left(x, x'\right) = -\delta^{(n)}\left(x - x'\right)\,, \qquad V = \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\ g^{tt} g^{\mu\nu} \partial_\nu\right) - \Delta_E\,, \tag{7}$$

и представить метрику фонового пространства–времени в виде

$$g_{tt} = -1 + h_{tt}\ , \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,.$$

В рамках теории возмущений решение уравнения (7) символически можно записать следующим образом

$$G = G_0 + G_0\ V\ G_0 + \ldots\,, \tag{8}$$

где G_0 – функция Грина уравнение Лапласа в n–мерном евклидовом пространстве, а обусловленные кривизной поправки к функции Грина определяются членами ряда (8), начиная со второго.

Для наших целей достаточно ограничиться вычислением первой поправки $\delta G = G_0 V G_0$ в низшем приближении по отклонению метрики от плоской. С этой точностью оператор возмущения $V(x, \partial)$, который построен из метрики, её производных и операторов дифференцирования, имеет вид

$$V(x, \partial) = \left(h_{tt} + \frac{h}{2}\right) \triangle_E - h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + + \frac{1}{2}(\partial_\lambda h)\partial^\lambda - \left[\partial_\lambda \left(h^{tt}\delta^{\lambda\tau} + h^{\lambda\tau}\right)\right]\partial_\tau\,.$$

Здесь и ниже поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью метрики пространства Евклида.

Ниже мы покажем, что в рамках метода размерной регуляризации вклад от первого слагаемого в правой части выражения (8) обращается в ноль. Что касается $\delta G = G_0 V G_0$, то используя явный вид функции G_0 нетрудно показать, что в пределе совпадающих точек имеет место формальное выражение

$$\delta G(x, x) = \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} e^{iqx} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{p^2 (p - q)^2} V(q, ip)\,,$$

где функция $V(q, ip)$ определена следующим образом

$$V(q, ip) = \int d^n x e^{-iqx}\ V(x, \partial)|_{\partial \to ip}\,. \tag{9}$$

Расходящиеся интегралы по $d^n p$, которые возникают в полученном выражении, являются фурье-образами произведений двух функций Грина или функции Грина и её производных с совпадающими аргументами. Эти интегралы типичны для квантовой теории поля. В рамках метода размерной регуляризации после замены $n \to D = (n - 2\varepsilon)$ они сводятся к одному из двух

$$J^{\varepsilon}_{\mu} = \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu}{p^2 \left(p-q\right)^2} = -\frac{(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2\left(D/2\right)}{\Gamma(D)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(q^2\right)^{D/2-2} q_\mu \tag{10}$$

или

$$J^{\varepsilon}_{\mu\nu} = \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 \left(p-q\right)^2} = \frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2\left(D/2\right)}{\Gamma(D)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(q^2\right)^{D/2-2} (q^2 \delta_{\mu\nu} - D q_\mu q_\nu)\ . \tag{11}$$

В (10) и (11) произвольный параметр μ, имеющий размерность массы, вводится для сохранения общей размерности регуляризуемого выражения.

Заметим, что, как это следует из (11),

$$G^{\varepsilon}_0(x,x) = \delta^{\mu\nu} J^{\varepsilon}_{\mu\nu} = 0\ ,$$

и $G^{\varepsilon}_0(x,x)$ не дает вклада в $G^{\varepsilon}_{\text{расх}}(x,x)$.

Таким образом, регуляризованная функция Грина в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$G^{\varepsilon}(x,x) = \frac{\mu^{2\varepsilon}}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2\left(D/2\right)}{\Gamma(D)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iqx} (q^2)^{D/2-1} \times \left[(3-2D) h_{tt} + (2-D)\left(h - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} h_{\mu\nu}\right)\right]. \tag{12}$$

Расходимости, которые могут появиться при снятии регуляризации связаны с наличием простого полюса у стоящей перед интегралом в (12) функции Эйлера при четном n, либо в интеграле по q, либо в том и другом месте одновременно.

2. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ В ПОЛЕ МНОГОМЕРНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

В стандартных координатах линейный элемент пространства-времени $(1+n)$–мерной шварцшильдовской черной дыры имеет вид

$$ds^2 = -\left[1 - \left(\frac{r_g}{r}\right)^{(n-2)}\right] dt^2 + \left[1 - \left(\frac{r_g}{r}\right)^{(n-2)}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2_{n-1}\,, \tag{13}$$

где r_g — шварцшильдовский радиус

$$r_g = \left[\frac{8\pi^{(2-n)/2}\ GM\ \Gamma(n/2)}{(n-1)}\right]^{1/n}\ ,$$

а $d\Omega^2_{n-1}$ — линейный элемент на $(n-1)$–мерной единичной сфере, $\Omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Для дальнейшего удобно перейти к изотропным координатам, в которых метрика сечения $t = \text{const}$ пространства–времени имеет конформно–евклидов вид. Это осуществляется заменой радиальной координаты $r \to \rho$

$$r = \rho \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_g}{\rho}\right)^{(n-2)}\right]^{\frac{2}{(n-2)}}\ ,$$

в результате которой метрика (13) приводится к виду

$$ds^2 = -\frac{\left[4\rho^{(n-2)} - r_g^{(n-2)}\right]^2}{\left[4\rho^{(n-2)} + r_g^{(n-2)}\right]^2} dt^2 + \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_g}{\rho}\right)^{(n-2)}\right]^{4/(n-2)} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu\,,$$

$$\rho = (\delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)^{1/2}\,, \qquad \mu,\nu = \overline{1,n}\,.$$

В низшем по r_g/ρ приближении

$$h_{tt}=\left(\frac{r_g}{\rho}\right)^{(n-2)},\quad h_{\mu\nu}=\frac{1}{(n-2)}\left(\frac{r_g}{\rho}\right)^{(n-2)}\delta_{\mu\nu}\,. \tag{14}$$

Таким образом, стоящее под интегралом в (12) выражение

$$\left[(3-2D)h_{tt}(q)+(2-D)\left(h(q)-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}h_{\mu\nu}(q)\right)\right]= \\ =-2(D-1)(r_g)^{(D-2)}\mathcal{F}\left(\frac{1}{\rho^{(D-2)}}\right),$$

где $\mathcal{F}$ — продолженный по размерности фурье-образ функции $1/\rho^{(n-2)}$.

Соответствующий фурье-образ хорошо определен в терминах обобщенных функций и имеет вид [7]

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\rho^\lambda}\right)=\int d^n x\frac{e^{iqx}}{\rho^\lambda}= \\ =2^{(n-\lambda)\pi^{n/2}}\frac{\Gamma((n-\lambda)/2)}{\Gamma(\lambda/2)}\frac{1}{q^{(n-\lambda)}}, \\ \lambda\neq n,n+2,n+4,\ldots\,.$$

Воспользовавшись этим соотношением дважды, первый раз при нахождении фурье-образа $\mathcal{F}(1/\rho^{(D-2)})$ и второй — при вычислении интеграла по q в (12), мы окончательно получаем, что регуляризованная функция Грина электростатического поля имеет вид

$$G^\varepsilon(x,x)=\frac{\mu^{2\varepsilon}\,\Gamma(D/2)}{4\pi^{D/2}(D-2)}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^{(D-2)},\quad D=n-2\varepsilon\,. \tag{15}$$

Здесь мы учли, что с принятой точностью изотропная радиальная координата точки ρ совпадает с её шварцшильдовской координатой r.

Сдвиг массы частицы δm связан с её собственной энергией соотношением

$$\delta m=\frac{E_{\text{рен}}}{\sqrt{-g_{tt}}}\,.$$

Откуда с учетом (4) и (15) мы получаем, что с принятой точностью

$$\delta m=\frac{e^2\,\Gamma(n/2)}{2\pi^{(n-2)/2}\,(n-2)}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^{(n-2)}. \tag{16}$$

Что касается действующей на заряд силы, то она равна

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}E_{\text{рен}}=\frac{e^2\,\Gamma(n/2)}{\pi^{(n-2)/2}}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^{(n-2)}\vec{r}. \tag{17}$$

Сила самодействия является силой отталкивания и убывает с расстоянием тем быстрее, чем больше число пространственных измерений.

В частном случае четырехмерной черной дыры наши результаты (16) и (17) совпадают с полученными с использованием других методов регуляризации [1–3]. Вместе с тем следует отметить, что отличительной особенностью предложенного метода является то, что, вычисленная методом размерной регуляризации, функция Грина $G^\varepsilon(x,x)$ не содержит расходящейся части как при четных, так и при нечетных n. При нечетном n стоящая перед интегралом в (12) гамма-функция и интеграл по q конечны, а при четном n простой полюс гамма-функции компенсируется простым нулем интеграла по q. Таким образом, в отличие от использовавшихся ранее методов при вычислении собственной энергии не возникает необходимость в явном отбрасывании расходящихся выражений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривалась проблема вычисления сдвига массы классической заряженной точечной частицы в гравитационном поле $(1+n)$–мерной $(n>3)$ черной дыры. Показано, что при рассмотрении этой, относящейся к классической теории поля, задачи с успехом могут использоваться хорошо разработанные методы квантовой теории поля и, в частности, метод размерной регуляризации. При этом получаемые методом размерной регуляризации результаты совпадают с результатами полученными с использованием других методов, но не возникает необходимость в явном отбрасывании расходящихся выражений.

Благодарности

Автор выражает благодарность проф. А. В. Борисову за интерес к работе и обсуждение результатов.

[1] *Vilenkin A.* Phys. Rev. D. **20**. P. 373. (1979).
[2] *Smith A. G., Will C. M.* Phys. Rev. D. **22**. P. 1276. (1980).
[3] *Зельников А. И., Фролов В. П.* ЖЭТФ. **82.** С. 321. (1982).
[4] *Leaute B., Linet B.* Phys. Lett. A. **58**. P. 5. (1976).
[5] *Leaute B.* Ann. Inst. Henri Poincare Sect. A. **27**. P. 167. (1977).
[6] *Ициксон К. И., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. В двух томах. М.: 1984.
[7] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука. 1965.

Sift of the mass of a charge in the field of (1+n)– dimensional black hole: dimensional regularization

Yu. V. Grats

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics,
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: grats@phys.msu.ru

The expression for the self-energy and the shift of mass of a classical charge in the space-time of $(1 + n)$ – dimensional Schwarzschild black hole is obtained with the use of the dimensional regularization method. It is shown that dimensional regularization leads to the results which are in agreement with the results obtained with the use of other methods of regularization.

PACS: 04.40.-b, 11.10.Kk, 11.10.Dh

Keywords: black holes, self-energy, regularization, renormalization.
Received 18.12.2012

Сведения об авторах

Грац Юрий Владимирович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru