

Анализ особенностей синхронизации 2D-решеток диффузионно-связанных квадратичных отображений посредством локального критерия стохастичности

А. А. Козлов*

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра физики полимеров и кристаллов.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

(Статья поступила 9.05.2012; Подписана в печать 3.07.2012)

В области изучения процессов синхронизации системы связанных отображений часто рассматриваются в качестве парадигматических моделей описания распределенных систем, которые позволяют наблюдать явления пространственно-временного хаоса, самоорганизации и синхронизации благодаря разнообразию возможных качественных типов коллективного поведения. В настоящей работе показана динамика 2D-решеток диффузионно-связанных квадратичных отображений с периодическими граничными условиями на основе наблюдения всевозможных паттернов ее поведения, которые оказываются во многом похожи на поведение 1D-цепочек таких же отображений. Однако, некоторые особенности динамики также выявлены и обсуждаются, особенно это касается режима сильной связи, когда ориентированные кластеры по 2 элемента, участвующие в «зиг-заг» паттерне коллективной динамики соответствующих доменов, конкурируют по направленности, образуя хаотические элементы на границе доменов. Понимание такого коллективного движения и других паттернов синхронизации в основном было достигнуто благодаря новому методу рассмотрения на основе локального критерия стохастичности, который позволяет исследовать не только локальное поведение отдельных элементов, но и эволюцию динамики всего пространства системы. Наши результаты показывают эффективность применения вышеобозначенного критерия на 2D-решетках диффузионно-связанных квадратичных отображений и других примерах регулярных сетей отображений, поэтому он может стать мощным инструментом для исследования различных типов проявления синхронизации в сетях связанных отображений в зависимости от их структуры.

PACS: 02.90.+p.

УДК: 530.1.

Ключевые слова: решетка сцепленных отображений, логистическое отображение, диффузия, синхронизация, паттерны.

ВВЕДЕНИЕ

Описание распределенных систем может быть выполнено посредством подхода, в котором среда представляется совокупностью взаимодействующих элементов различной природы. Процессы синхронизации в таких ансамблях взаимодействующих элементов активно изучаются в рамках моделирования физических, биологических, химических, технологических и социальных систем [1]. В этих исследованиях системы сцепленных отображений часто рассматриваются в качестве парадигматических моделей описания, в которых распределенная система представляется совокупностью дискретных по времени и пространству элементов с определенным типом взаимодействия.

Благодаря разнообразию возможных качественных типов коллективного поведения, описанный выше подход позволяет наблюдать сложные явления пространственно-временного хаоса, самоорганизации, паттернообразования и др. [2, 3] В частности, даже широко применяемые модели 1D-цепочки диффузионно-связанных логистических отображений с периодическими граничными условиями проявля-

ют достаточно сложные паттерны коллективного поведения при небольших значениях параметра связи: 1) состояние «замороженных» хаотических структур; 2) блуждание хаотических структур по цепочке, обладающей коллективной «зиг-заг» динамикой; 3) перемежаемость областей регулярной и хаотической динамики; 4) пространственно-временной хаос (полностью развитая турбулентность) [4]. Однако, при больших параметрах связи ε описание поведения таких систем до сих пор остается открытой и важной проблемой [5]. Кроме этого, в свете появления еще более общего метода моделирования сложнейших биологических (клеточные процессы, нейронные сети, эволюция ДНК) и искусственных (интернет, WWW, логистика, производство) систем, состоящего в построении сложных сетей [6], данное направление исследований систем сцепленных отображений имеет большое будущее. При этом исследование динамики систем сцепленных отображений требует анализа как их локального поведения, так и динамики всей системы в целом, а общепринятые методы, развитые в рамках задачи анализа временных рядов, не всегда оказываются эффективными для восстановления коллективной динамики системы.

В настоящей работе для изучения особенностей синхронизации 2D-решеток сцепленных отображений диффузионно-связанных квадратичных отображений

*E-mail: kozlov@polly.phys.msu.ru

предлагается использовать альтернативный подход на основе локального критерия стохастичности [4, 7], состоящий в выявлении периодичности траекторий элементов системы на отдельных отрезках времени. Данный метод в сочетании с наблюдением за изменением состояния с помощью снимков системы, отображающих значения элементов выше или ниже неподвижной точки квадратичного отображения, дает полную картину индивидуальной и коллективной динамики изучаемой системы в каждый момент времени, позволяя проводить анализ особенностей ее синхронизации.

1. МОДЕЛЬ 2D-РЕШЕТКИ ДИФФУЗИОННО-СВЯЗАННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ЛОКАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

Одной из простейших моделей систем сцепленных отображений является 1D-цепочка диффузионно-связанных квадратичных отображений, временное преобразование которой задается модифицированным логистическим отображением

$$x_{n+1} = f(x_n, a) = 1 - ax_n^2, \quad (1)$$

а пространственное преобразование имеет вид $x_{n+1}(k) = (1 - \varepsilon)f(x_n(k), a) + \frac{\varepsilon}{2}(f(x_n(k-1), a) + f(x_n(k+1), a))$ с периодическими граничными условиями $x_n(k+m) = x_n(k)$ (m — количество элементов в цепочке). В настоящей работе рассматривается пример 2D-решетки (64x64) диффузионно-связанных квадратичных отображений, которая является прямым продолжением предыдущей модели, т.к. временное отображение каждого элемента и периодические граничные условия (только теперь как по горизонтали, так и по вертикали) остаются теми же, а пространственное преобразование имеет вид:

$$x_{n+1}(i, j) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i, j), a) + \frac{\varepsilon}{4}[f(x_n(i+1, j), a) + f(x_n(i-1, j), a) + f(x_n(i, j+1), a) + f(x_n(i, j-1), a)]. \quad (2)$$

При этом ввиду рассмотрения значений элементов $x_n(i, j) \in (-1, 1)$, что обеспечивается соответствующими начальными условиями и выбором параметра нелинейности $a \in (1, 2)$, у вышеуказанного квадратичного отображения можно рассматривать лишь одну неподвижную точку $x^* = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a$, относительно которой происходит колебательное движение элементов системы (рис. 1).

Ранее для 1D-цепочки было показано, что результатом диффузионной связи в такой системе становится коллективная «зиг-заг» динамика, при которой соседние элементы движутся в противофазе по отношению к неподвижной точке отображения [4, 7]. Для изучения таких паттернов синхронизации («шахматная доска» в 2D-решетке) в настоящей работе в

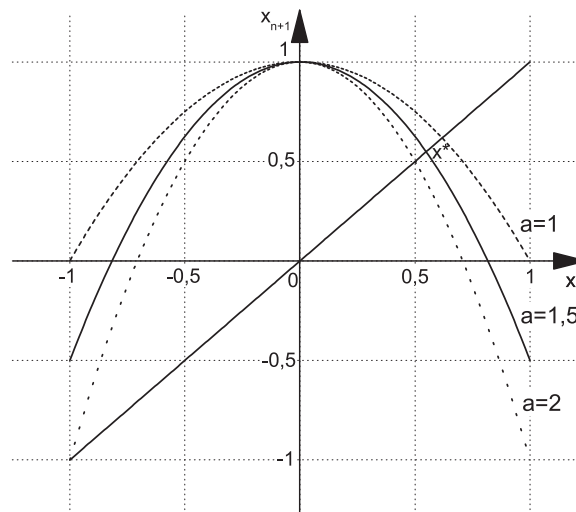


Рис. 1: Квадратичное (модифицированное логистическое) отображение

качестве дополнительного метода исследования были использованы снимки состояния системы, отображающие значения элементов выше неподвижной точки квадратичного отображения x^* как 1 и ниже как 0, т.е. графики $H(x(i, j) - x^*)$ для всей системы, где $H(x)$ — функция Хевисайда. При этом, т.к. рассмотрение ее динамики требует анализа как локального поведения, так и динамики всей решетки в целом, то как основной метод исследования применялся локальный критерий стохастичности, основанного на выявлении периодичности траекторий элементов системы на отдельных отрезках времени.

Будем рассматривать динамику системы сцепленных отображений как совокупность временных рядов значений каждого ее элемента $\{x_1(i, j), x_2(i, j), x_3(i, j), \dots, x_t(i, j), \dots, x_T(i, j)\}$, где i, j задают расположение элемента в решетке 64x64, t — дискретное время (от 1 до T). Для временного ряда выбранного элемента x_1, x_2, \dots, x_T производится разбивка на отрезки длиной τ , например, x_1, \dots, x_τ . Далее на каждом таком отрезке применяется локальный критерий стохастичности, состоящий из следующих этапов [4, 7]:

1) Сравнение x_1, \dots, x_τ со специально построенными рядами, состоящими из периодически повторяющихся подпоследовательностей периода p (от 1 до $\tau/2$), путем вычисления величин:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=p+1}^{\tau} (x_i - x_{(i \bmod p)})^2}{\tau - p}}, \quad (3)$$

представляющих собой среднеквадратичное отклонение элементов остатка исходного ряда x_{p+1}, \dots, x_τ от соответствующих элементов модельного периодического ряда $x_1, x_2, \dots, x_p, x_1, x_2, \dots, x_p, \dots$

2) Нахождение величины минимального отклоне-

ния $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau) = \lambda_P$ и значения P , являющегося периодом, который приближает данный отрезок ряда x_1, \dots, x_τ .

Вычисляя таким образом λ и P для всех отрезков длиной τ , можно проследить динамику элементов на всем промежутке длины T . Проведя процедуры разбивки временных рядов и их анализа для всех точек системы, можно выявлять области синхронизации в пространстве системы.

Данный критерий уже показал свою эффективность для исследования 1D-цепочек диффузионно-сцепленных квадратичных отображений с периодическими граничными условиями при небольших значениях параметра связи ε [4, 7], позволяя выделять следующие основные типы сложного поведения:

1) Состояние «замороженных» хаотических структур — картина отклонений от периодичности λ и периода P , на которой несмотря на наличие диффузионной связи образуются устойчивые области с регулярной и хаотической динамикой с расположением и размерами, зависящими от начальных условий;

2) Блуждание хаотических структур по цепочке, обладающей коллективной «зиг-заг» динамикой — картина отклонений от периодичности λ и периода P , на которой из-за роста параметра нелинейности хаотические элементы могут рождаться парами на элементах с дефектами (элементы, динамика которых не соответствует коллективной «зиг-заг» динамике) и исчезать при столкновении друг с другом или с другим элементом с дефектом, а кроме этого эти хаотические элементы движутся подобно броуновским частицам по цепочке до момента их полной аннигиляции и образования паттерна коллективной «зиг-заг» динамики;

3) Пространственно-временной хаос (полностью развитая турбулентность) — картина отклонений от периодичности λ и периода P , на которой из-за увеличения степени нелинейности после перемежаемости областей регулярной и хаотической динамики происходит разрушение всех пространственных областей синхронизации, а динамика всей цепочки начинает быстро меняться как во времени, так и в пространстве.

В следующих разделах мы сконцентрируемся на особенностях синхронизации 2D-решеток диффузионно-связанных квадратичных отображений, в т.ч. при блуждании хаотических структур по решетке, обладающей коллективной «зиг-заг» динамикой.

2. ПРИМЕРЫ ПАТТЕРНОВ И ОСОБЕННОСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ 2D-РЕШЕТОК СЦЕПЛЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В результате исследования выяснилось, что рассматриваемая модель при определенных значениях ε проявляет практически те же типы сложного поведения, которые наблюдались ранее для

1D-цепочек (состояние «замороженных» хаотических структур, блуждание хаотических структур по решетке с регулярной «зиг-заг» динамикой, а также пространственно-временной хаос), с поправкой на размерность пространства, а также на более сильную связь при одних и тех же значениях ε .

Далее приведены примеры паттернов коллективной динамики 2D-решеток при фиксированном значении параметра связи $\varepsilon = 0.1$ и различных значениях параметра нелинейности отображения a , подтверждаемые картинками системы по различным параметрам (значение относительно неподвижной точки $H(x(i, j) - x^*)$, отклонение от периодичности $\lambda(i, j)$ и период $P(i, j)$) в определенный момент времени.

1) Состояние «замороженных» хаотических элементов (рис. 2, при $a \in (1, 1.75)$), характеризующееся несколькими отдельно стоящими аperiодическими элементами на фоне несинхронизованных между собой остальных элементов, движение которых близко к периодическому.

2) Замыкание «замороженных» хаотических элементов в неподвижные цепочки (рис. 3, при $a = 1.75$), происходящее при увеличении количества аperiодических элементов и их упорядочении посредством диффузионной связи на фоне синхронизованной динамики в виде «шахматной доски» остальных элементов, которая является двумерным аналогом коллективной «зиг-заг» динамики в одномерной цепочке.

3) Блуждание и аннигиляция цепочек хаотических элементов на решетке, обладающей коллективной динамикой в виде «шахматной доски» (рис. 4, при $a \in (1.75, 1.9)$), что в известной степени аналогично броуновскому блужданию одиночных хаотических элементов по одномерной цепочке, обладающей коллективной «зиг-заг» динамикой, до момента их полной аннигиляции.

4) Перемежаемость областей регулярной и хаотической динамики (рис. 5, при $a = 1.9$), при которой полной аннигиляции хаотических элементов не происходит из-за рождения новых хаотических элементов на дефектах (элементы, динамика которых не соответствует коллективной «зиг-заг» динамике).

5) Пространственно-временной хаос или полностью развитая турбулентность (рис. 6, при $a \in (1.9, 2)$), при которой из-за увеличения степени нелинейности также как и в случае одномерной цепочки происходит разрушение всех пространственных областей синхронизации, большинство элементов начинают двигаться хаотически, а динамика всей цепочки может быстро меняться как во времени, так и в пространстве (паттерна «шахматной доски» практически не наблюдается).

На рисунках, показанных выше, можно наблюдать как нетождественность, так и частичное или полное совпадение структур паттернов на всех трех панелях (например, рис. 2, 3 и 4 соответственно), что имеет достаточно простое, но многостороннее объяснение.

Во-первых, графики отклонений от периодичности

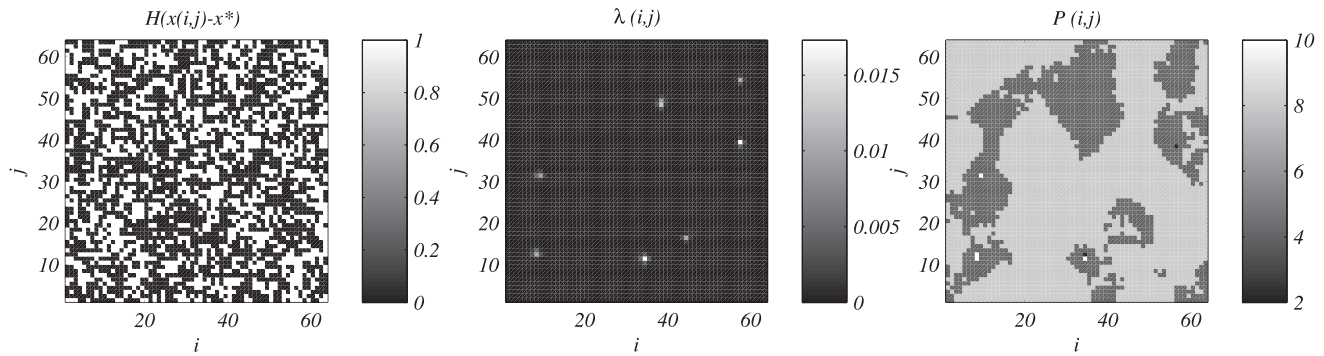


Рис. 2: Состояние «замороженных» хаотических элементов на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.4$ и $\varepsilon = 0.1$ на шаге по времени $t = 15000$

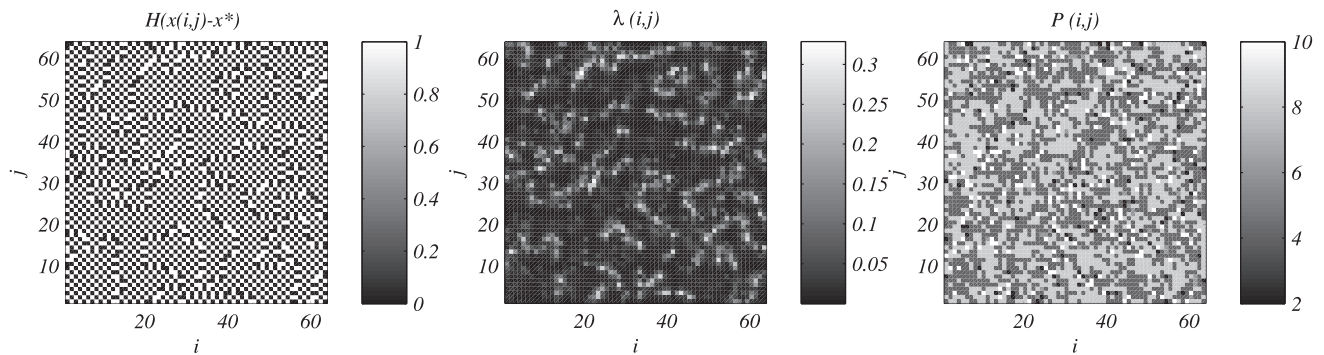


Рис. 3: Замыкание «замороженных» хаотических элементов в цепочки на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.75$ и $\varepsilon = 0.1$ на шаге по времени $t = 20000$

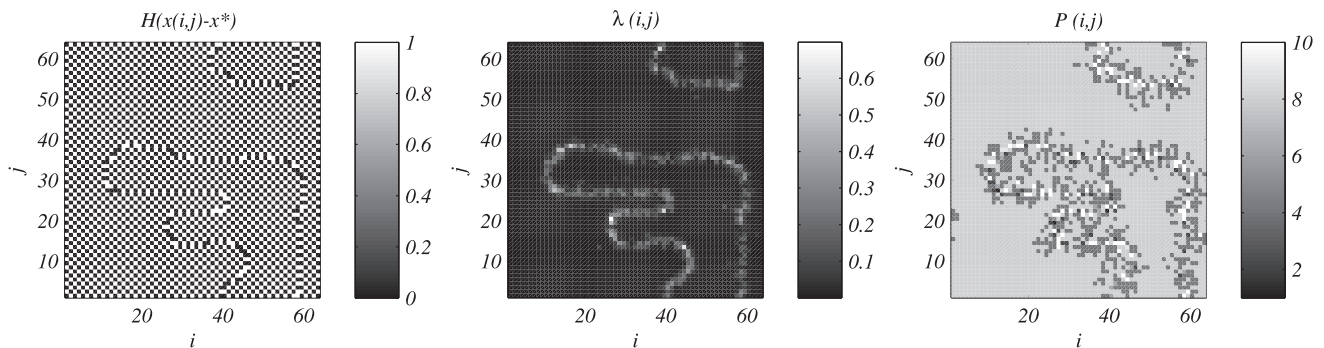


Рис. 4: Блуждание и аннигиляция цепочек хаотических элементов при коллективной динамике «шахматной доски» остальных элементов на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.8$ и $\varepsilon = 0.1$ на шаге по времени $t = 5000$

λ и периода P являются результатом аналитического анализа с использованием локального критерия стохастичности динамики каждого элемента системы на временном отрезке длиной τ (в нашем случае порядка 20), в то время как снимок состояния решетки относительно неподвижной точки отображения делается в конкретный момент времени и служит в основном для определения особенностей состояния системы (в нашем случае для определения образования паттерна

«шахматной доски»). Поэтому при некоторых значениях параметров нелинейности и связи, когда отсутствует паттерн «шахматной доски» (рис. 2), не наблюдается тождественности структуры наблюдаемых паттернов на различных графиках. В других случаях при образовании паттернов «шахматной доски» (рис. 3 и 4) можно увидеть частичное или полное совпадение структур паттернов на всех трех панелях.

Во-вторых, несовпадение структур наблюдаемых

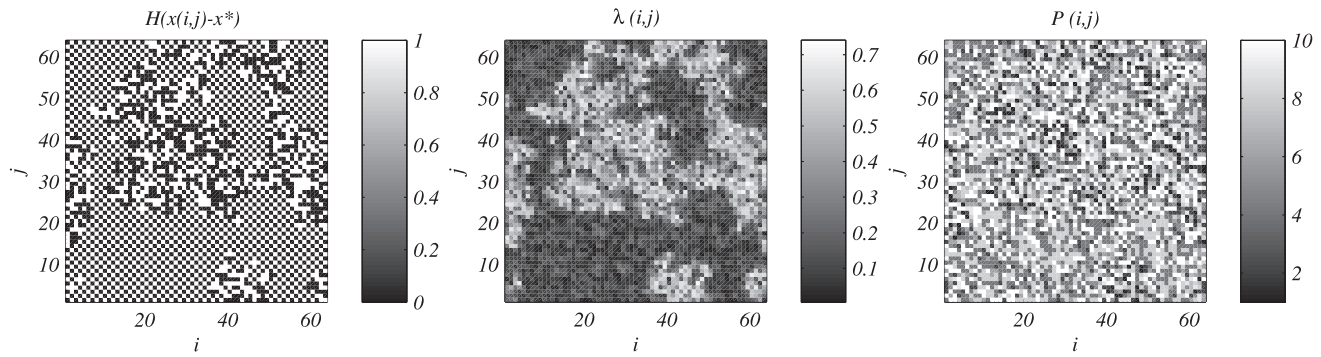


Рис. 5: Переमेжаемость областей регулярной и хаотической динамики на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.9$ и $\varepsilon = 0.1$ на шаге по времени $t = 10000$

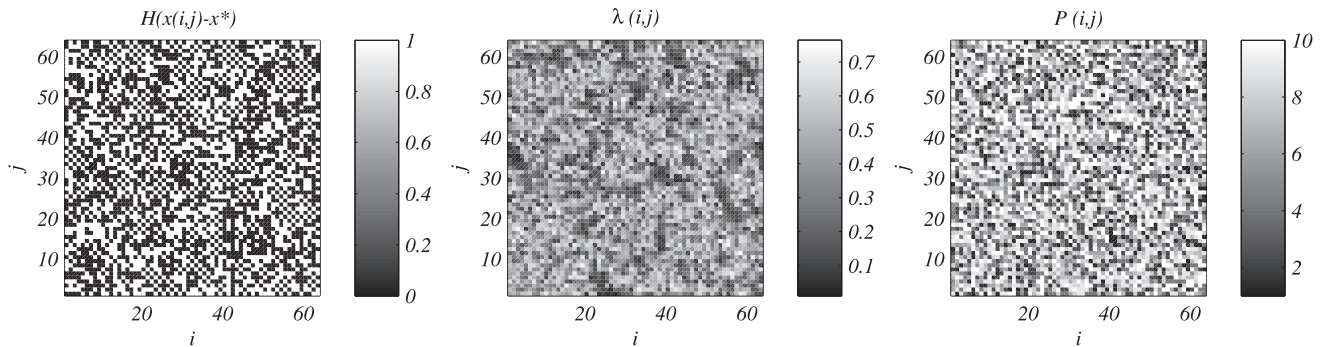


Рис. 6: Пространственно-временной хаос или полностью развитая турбулентность на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.905$ и $\varepsilon = 0.1$ на шаге по времени $t = 10000$

паттернов на графиках отклонений от периодичности λ и периода P (рис. 2 и 3) наблюдается, когда в системе присутствует большое количество хаотических элементов (рис. 3) или при их специфичном одиночном расположении (рис. 2). Дело в том, что в этих случаях используемый метод анализа может давать неточные результаты, определяя в качестве оптимального периода не истинное его значение, а кратное ему. При этом график периода P не соответствует графику отклонений от периодичности λ , т.к. появляются ошибочные области синхронизации по периоду (рис. 2) или весь график периода P сильно зашумляется ложными значениями (рис. 3). В таких случаях для определения паттерна рекомендуется использовать только график отклонений от периодичности λ , считая, что график периода P должен выглядеть идентично (подобно рис. 4).

Перейдем к описанию основных особенностей синхронизации 2D-решеток диффузионно-связанных квадратичных отображений по сравнению с 1D-цепочками.

При $\varepsilon = 0.1$ в диапазоне значений параметра нелинейности $a \in (1.75, 1.9)$ замечена сильная зависимость времени образования паттерна «шахматной доски» от начальных условий. Дело в том, что хаотическое

блуждание цепочек по решетке может наблюдаться разное время: 1) порядка 10000 шагов при аннигиляции цепочек в результате образования из них стягивающегося кольца (рис. 4); 2) неограниченно долго в случае образования горизонтально или вертикально растянутых цепочек, которые не обязательно аннигилируют за конечное время (рис. 7).

Кроме этого нужно отметить сильную зависимость поведения 2D-решетки от параметра связи (по сравнению с 1D-цепочкой), возникающую из-за увеличения количества связей в решетках и соответственно более сильной связи при тех же значениях ε .

В частности было замечено, что при слабой связи ($\varepsilon < 0.1$) область образования «шахматной доски» по параметру нелинейности становится значительно уже и смещается в сторону меньших значений. Например, для $\varepsilon = 0.05$ эта область лежит в малой окрестности значения $\tilde{a} = 1.65$ (рис. 8). При этом наблюдение за решеткой с помощью графиков λ и P затруднено, т.к. они получаются зашумленными из-за низкой синхронизации элементов, следующей из их слабой связи.

В случае сильной связи ($\varepsilon > 0.1$) область образования «шахматной доски» по параметру нелинейности тоже значительно сужается или вовсе пропадает, т.к. появляется тенденция к образованию более крупных

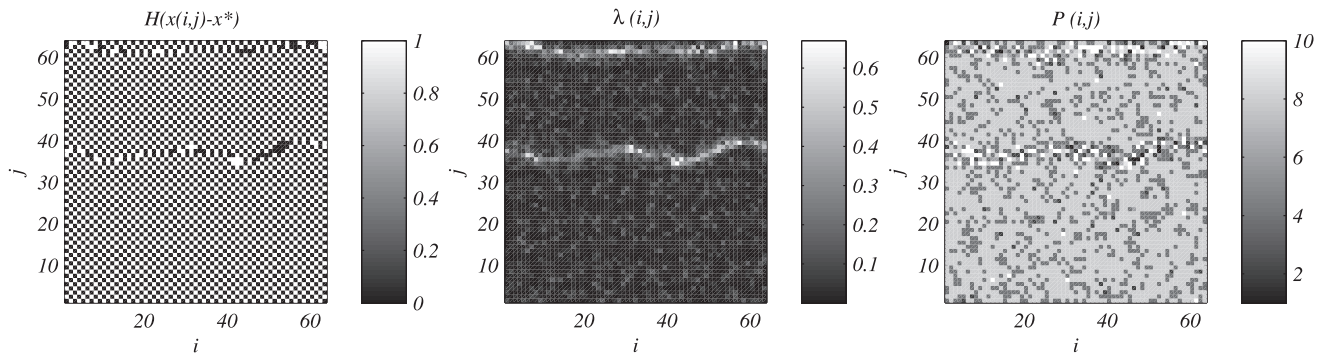


Рис. 7: Блуждание без аннигиляции цепочек хаотических элементов при коллективной динамике «шахматной доски» на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.85$ и $\varepsilon = 0.1$ на шаге по времени $t = 60000$

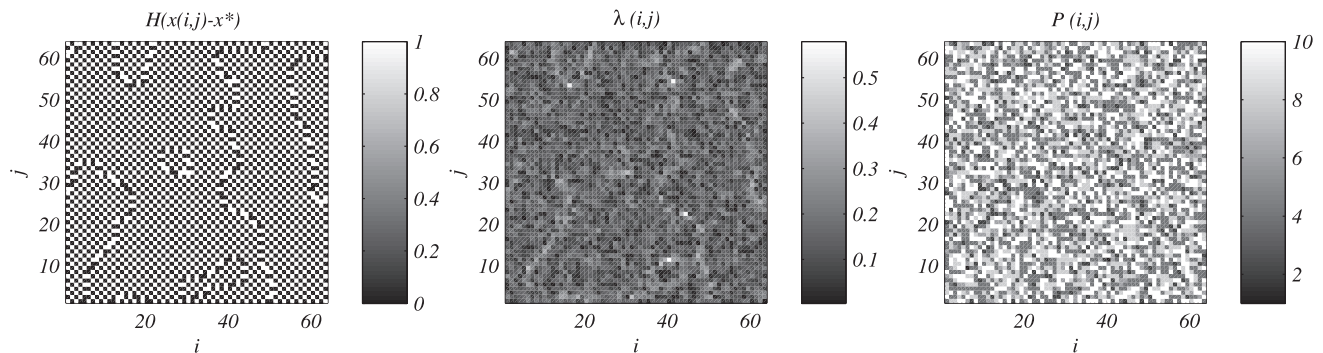


Рис. 8: Блуждание и аннигиляция цепочек хаотических элементов при коллективной динамике «шахматной доски» на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.65$ и $\varepsilon = 0.05$ на шаге по времени $t = 10000$

кластеров по 2 элемента и их конкуренции по направленности в составе доменов. При некоторых значениях параметров можно наблюдать такое поведение с помощью графиков λ и P , т.к. на них видно, что движение в доменах часто синхронизовано по периоду, а хаотические элементы сосредоточены на границах, где происходит конкуренция по направленности кластеров (рис. 9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наблюдаемые особенности синхронизации решеток сцепленных отображений в зависимости от параметра связи определяются влиянием областей синхронизации («зиг-заг» движения соседних элементов около неподвижной точки отображения: «темные» области по λ) и хаотичности (аперiodического движения: «светлые» области по λ) в пространстве системы. По сути, решетки сцепленных отображений проявляют те же типы сложного поведения, что и цепочки, с поправкой на размерность пространства (блуждание хаотических структур — в виде цепочек, регулярная динамика — в виде «шахматного поля»), а также на более сильную связь при тех же значениях ε .

Однако, с помощью локального критерия стохастичности и снимков системы относительно неподвижной точки было замечено, что при слабой связи ($\varepsilon < 0.1$) область образования «шахматной доски» по параметру нелинейности становится a значительно уже или вообще не наблюдается из-за слабой синхронизации, а при сильной связи ($\varepsilon > 0.1$) вышеупомянутые отличия 2D-решетки по отношению к 1D-цепочке при некоторых значениях a приводят к собственной картине синхронизации решеток в виде доменов горизонтально и вертикально ориентированных кластерных структур из двух элементов.

Применяемый в настоящей работе комбинированный метод рассмотрения динамики системы сцепленных отображений является альтернативным способом изучения синхронизации таких систем и позволяет быстро установить коллективную динамику решетки по областям ее синхронизации на картине отклонений от периодичности λ и периодов P . Однако, при определении периодов метод может давать неточные результаты, т.к. в процессе поиска оптимального периода можно получить не истинное его значение, а кратное ему. Поэтому необходимо усовершенствовать данный метод путем выбора оптимальной длины отрезков разбиения τ (в настоящей работе в основном

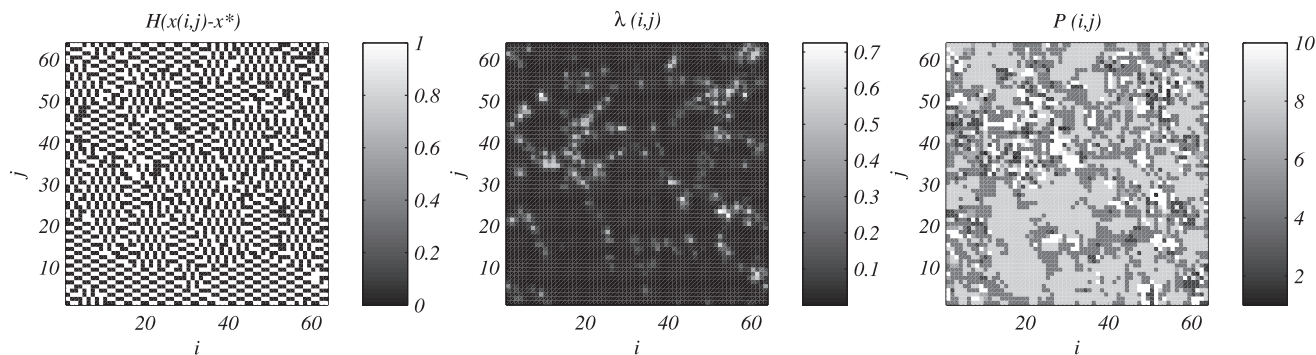


Рис. 9: Образование доменов из ориентированных вертикально и горизонтально кластеров по 2 элемента на изображении решетки относительно неподвижной точки отображения (слева), а также графиках отклонений от периодичности λ (в центре) и периода P (справа) при $a = 1.95$ и $\varepsilon = 0.2$ на шаге по времени $t = 10000$

$\tau = 20$). При этом показавший свою эффективность локальный критерий стохастичности можно использовать для перспективных исследований в области синхронизации сложных сетей взаимодействующих элементов.

Автор выражает свою искреннюю благодарность за методическую и идейную поддержку в проведении

данных исследований в области систем сцепленных отображений выдающемуся ученому в области синергетики и теории хаоса, бывшему руководителю Лаборатории нелинейной динамики и хаоса и профессору Физического факультета МГУ А. Ю. Лоскутову, который, к глубокому сожалению, скончался в 2011 году в результате тяжелой болезни.

- [1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. (Cambridge University Press, 2003).
- [2] *Kaneko K.* Chaos. **3**. P. 279. (1992).
- [3] *Crutchfield J.P., Kaneko K.* Phenomenology of spatio-temporal chaos. in: Directions in Chaos. (Singapore: World Scientific, 1987).
- [4] *Лоскутов А.Ю., Прохоров А.К., Рыбалко С.Д.* Теор. и матем. физика. **132**. С. 105 (2002).

- [5] *Lai-Sang Young.* Nonlinearity. **21**. P. 245 (2008).
- [6] *Reka A., Barabasi A.* Reviews of Modern Physics. **74**. P. 45 (2002).
- [7] *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. (РХД, М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007).

Analysis of synchronization features in 2D-lattices of diffusively coupled quadratic maps by means of local criterion of stochasticity

A. A. Kozlov

*Department of Polymer and Crystal Physics,
Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119991, Russia.
E-mail: kozlov@polly.phys.msu.ru*

In the field of synchronization processes coupled map lattices (CML) represent paradigmatic models of extended systems exhibiting spatiotemporal chaos, self-organization and synchronization due to the rich variety of global qualitative behavior. In this article dynamics on 2D-lattice of diffusively coupled quadratic maps with periodic boundary conditions is shown in all patterns of its behavior which are turned out to be quite similar to those ones of 1D-chain. However some of its specific features are also revealed and discussed, especially in a strong coupling regime when domains of differently oriented 2-element clusters involved zig-zag dynamics in domains are competing with the formation of chaotic elements on the borderlines of the domains. The comprehension of such cooperative behavior and other synchronization patterns mostly appears with emergent method, developed in the form of local criterion of stochasticity which allows investigating not only the local behavior of individual elements, but the evolution of the global dynamics of the entire phase space. Our results show the effectiveness of the criterion on 2D-lattice of diffusively

coupled quadratic maps and other examples of regular networks, so it is believed to provide a powerful framework to study various types of synchronizability for networks of coupled maps depending on their architecture.

PACS: 02.90.+p.

Keywords: coupled map lattices, logistic map, diffusion, synchronization, patterns.

Received 9 May 2012.

Сведения об авторах

1. Козлов Александр Александрович — магистр физики, аспирант кафедры физики полимеров и кристаллов Физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова; тел.: (495) 939-51-56, e-mail: kozlov@poly.phys.msu.ru.
-